Metodi Matematici – Probabilità e Statistica

Correzione Compitino del 20.4.2004

nota: *Una sola risposta è esatta. 4 punti per una risposta esatta, -2 per una sbagliata, 0 per una non data. Gli esercizi sono divisi in 5 gruppi di 4 varianti. Il compitino era costituito di un esercizio scelto a caso da ogni gruppo (per un totale di 5 esercizi)*

1 Primo Gruppo

Es. 1

Calcolare la varianza σ^2 della v.a. discreta X che prende con la stessa probabilità i valori $-1, 2, 3$.

a. $\sigma^2 = 8/3$
b. $\sigma^2 = 26/9$
c. $\sigma^2 = 38/9$
d. $\sigma^2 = -3$

Risposta: b
Soluzione
Poichè X prende i valori $-1, 2, 3$ con la stessa probabilità, allora deve essere

$$P(X = -1) = P(X = 2) = P(X = 3) = 1/3$$

e quindi, utilizzando la definizione di valor medio e varianza possiamo calcolare:

$$E[X] = (-1)P(X = -1) + (2)P(X = 2) + (3)P(X = 3) = \frac{4}{3}$$

e

$$E[X^2] = (-1)^2P(X = -1) + (2)^2P(X = 2) + (3)^2P(X = 3) = \frac{14}{3}$$

quindi

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{14}{3} - \frac{16}{9} = \frac{26}{9}.$$

Es. 2

Calcolare la varianza σ^2 della v.a. discreta Y che prende con la stessa probabilità i valori $-1, 1, 3$.

a. $\sigma^2 = 8/3$
b. $\sigma^2 = 26/9$
c. $\sigma^2 = 38/9$
d. $\sigma^2 = -3$

Risposta: a

Es. 3

Calcolare la varianza σ^2 della v.a. discreta Y che prende con la stessa probabilità i valori $1, -2, 3$.

a. $\sigma^2 = 8/3$
b. $\sigma^2 = 26/9$
c. $\sigma^2 = -3$
d. $\sigma^2 = 38/9$

Risposta: d

Es. 4

Calcolare la varianza σ^2 della v.a. discreta X che prende con la stessa probabilità i valori $-1, -2, 3$.

a. $\sigma^2 = 8/3$
b. $\sigma^2 = -3$
c. $\sigma^2 = 14/3$
d. $\sigma^2 = 38/9$

Risposta: c

2 Secondo Gruppo

Es. 5

Quale delle seguenti è la funzione generatrice di una binomiale.

a. $\phi(t) = 0.25e^{2t} + 0.25 + 0.5e^t$
b. $\phi(t) = 0.5 - 0.5e^t$
c. $\phi(t) = 0.5(1 + 2e^t + e^{2t})$
d. $\phi(t) = 0.5e^{2t} + 0.25 + 0.5e^t$

Risposta: a
Soluzione
La forma generale della funzione generatrice di una binomiale di parametri (n, p) è:

$$\phi(t) = ((1-p) + pe^t)^n$$

ovvero un polinomio di grado n in t dove il termine di grado massimo ha coefficente p^n e quello di grado minimo ha coeff $(1-p)^n$. Tra le possibili risposte c'e' un solo polinomio di primo grado (risposta (b)) che quindi dovrebbe corrispondere a una Binomiale con $n = 1$, ma si vede facilmente che il suo valore per $t = 0$ non corrisponde a $\phi(0) = 1$, quindi non può essere una funzione generatrice. Tutte le altre risposte corrispondono a polinomi di secondo grado. Per individuare quella corretta basta osservare che solo la risposta (a), calcolata in zero, fa uno.

Es. 6

Quale delle seguenti è la funzione generatrice di una binomiale.

a. $\phi(t) = (1 + 6e^t + 9e^{2t})/8$
b. $\phi(t) = (1 + 6e^t + 9e^{2t})/16$
c. $\phi(t) = 0.5 + e^t$
d. $\phi(t) = 0.0625(1 - 6e^t + 9e^{2t})/16$

Risposta: b
Soluzione
Si ragiona come nel caso dell'esercizio precedente, osservando anche che i coefficenti del polinomio non possono essere negativi e quindi si può scartare la risposta (d) a-priori.

Es. 7

Quale delle seguenti è la funzione generatrice di una binomiale.

a. $\phi(t) = (9 + 6e^t + e^{2t})/8$
b. $\phi(t) = 1 + 0.5e^t$
c. $\phi(t) = 0.0625(9 + 6e^t + e^{2t})$
d. $\phi(t) = (9 - 6e^t + e^{2t})/16$

Risposta: c

Es. 8

Quale delle seguenti è la funzione generatrice di una binomiale.

a. $\phi(t) = (e^t - 1)/2$
b. $\phi(t) = (2/3) + (2/3)^2e^t + (2/3)^2e^{2t}$
c. $\phi(t) = (2/3)^2e^{2t} + (1/3)^2 + (2/3)^2e^{-t}$
d. $\phi(t) = (4e^{2t} + 1 + 4e^t)/9$

Risposta: d
Soluzione
Qui si può anche osservare che la risposta (c) non può essere quella giusta perche compare un termine del tipo e^{-t}, il che è impossibile per la funzione generatrice della binomiale e in generale per la funzione generatrice di una v.a. positiva.

3 Terzo Gruppo

Es. 9

Sia X una v.a. discreta di media 0 e tale che $\mathrm{Var}(X^3) = 8$. Sapendo che X può assumere solamente i valori $-a$ e a, determinare il valore della quantità a.

a. $a = 2$
b. $a = \sqrt{2}$
c. $a = 1$
d. $a = \sqrt{3}$

Risposta: b
Soluzione
Poichè X assume solo i valori $-a$ ed a e la sua media è nulla, abbiamo che, denotando $p = P(X = -a)$

$$P(X = a) = 1 - p$$

e che

$$0 = E[X] = (a)P(X = a) + (-a)P(X = -a) = ap + (-a)(1-p) = 2ap - a = a(2p-1)$$

e quindi (escludendo il caso banale in cui $a = 0$) si ha $p = 1/2$. Se vogliamo calcolare la varianza di $Y = X^3$ in funzione di a si ottiene

$$\mathrm{Var}[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = E[X^6] - (E[X^3])^2$$

dove

$$E[X^3] = (a)^3P(X = a) + (-a)^3P(X = -a) = \frac{a^3 + (-a)^3}{2} = 0$$

e

$$E[X^6] = (a)^6P(X = a) + (-a)^6P(X = -a) = \frac{a^6 + (-a)^6}{2} = a^6$$

quindi

$$8 = \mathrm{Var}[X^3] = a^6$$

da cui si ricala $a = \sqrt{2}$.

Es. 10

Sia X una v.a. discreta di media 0 e tale che $\mathrm{Var}(X^3) = 27$. Sapendo che X può assumere solamente i valori $-a$ e a, determinare il valore della quantità a.

a. $a = 3$ c. $a = 1$
b. $a = \sqrt{2}$ d. $a = \sqrt{3}$

Risposta: d

Es. 11

Sia Y una v.a. discreta di media 0 e che assume solamente i valori $-a$ e a. Inoltre si sa che $\text{Var}(Y^3) = 5^2$. Determinare il valore della quantità a.

a. $a = \sqrt[3]{5}$ c. $a = \sqrt{5}$
b. $a = 5$ d. $a = 1$

Risposta: a

Es. 12

Sia Y una v.a. discreta di media 0 e che assume solamente i valori $-a$ e a. Inoltre si sa che $\text{Var}(Y^3) = 3^2$. Determinare il valore della quantità a.

a. $a = \sqrt{3}$ c. $a = \sqrt[3]{3}$
b. $a = 3$ d. $a = 1$

Risposta: c

4 Quarto Gruppo

Es. 13

Siano date due v.a. indipendenti $X \sim \text{Bin}(2, 1/2)$ e $Y \sim \text{Bin}(2, 1/2)$, calcolare $r = \text{Var}(3 + 2X - 4Y)$.

a. $r = 0$ c. $r = 10$
b. $r = -6$ d. $r = 8$

Risposta: c
Soluzione
La varianza di una Binomiale (n, p) è $np(1 - p)$. Quindi

$$r = \text{Var}(3 + 2X - 4Y) = \text{Var}(2X) + \text{Var}(-4Y) = (2)^2\text{Var}(X) + (-4)^2\text{Var}(Y)$$

da cui deriva la risposta.

Es. 14

Siano date due v.a. indipendenti $X \sim \text{Bin}(2, 1/2)$ e $Y \sim \text{Bin}(2, 1/2)$, calcolare $r = \text{Var}(-3 + X - 3Y)$.

a. $r = -4$ c. $r = 2$
b. $r = 1$ d. $r = 5$

Risposta: d

Es. 15

Siano date due v.a. indipendenti $X \sim \text{Bin}(3, 1/2)$ e $Y \sim \text{Bin}(3, 1/2)$, calcolare $r = \text{Var}(X - 3Y - 2)$.

a. $r = 3/2$

b. $r = 15$

c. $r = -12$

d. $r = 30$

Risposta: b
Soluzione
A causa di una svista non viene elencata la risposta esatta che è 15/2.

Es. 16

Siano date due v.a. indipendenti $X \sim \text{Bin}(3, 1/2)$ e $Y \sim \text{Bin}(3, 1/2)$, calcolare $r = \text{Var}(1 - 5X + 3Y)$.

a. $r = 51$

b. $r = 6$

c. $r = -24$

d. $r = 30$

Risposta: a
Soluzione
A causa di una svista non viene elencata la risposta esatta che è 51/2.

5 Quinto Gruppo

Es. 17

Nei giorni di bel tempo, le vendite di un negozio del centro sono descritte da una v.a. gaussiana $X^b \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Quando piove, si osserva un calo medio delle vendite, descritte ora da una v.a. gaussiana $X^p \sim N\left(\mu - \theta, \sigma^2\right)$. Le vendite relative a giorni diversi si possono considerare indipendenti.
Chiamiamo sfortunati i giorni in cui il valore delle vendite risulta inferiore a 25.

i. Supponiamo che sia $P\left(X^b > 25\right) = 0.95$, mentre $P\left(X^p > 25\right) = 0.8$. Supponiamo che piova 3 giorni su 10, mediamente. Calcolare la probabilità che un generico giorno sia sfortunato.
ii. Il gestore del negozio sostiene che, in 100 giorni lavorativi, il numero medio di giorni sfortunati è inferiore a 10 e la probabilità di osservarne 20 è circa $e^{-9.5}\frac{9.5^{20}}{20!}$. Spiegare quali considerazioni rigorose supportano le opinioni del gestore.
iii. Supponiamo $\sigma^2 = 1$. Trovare il valore della diminuzione media θ di cui si è parlato al punto (i): verificare che vale $\theta = q_{0.2} - q_{0.05}$.

Sol. (i): Indichiamo con X la v.a. che descirve genericamente le vendite. Indichiamo con b e p gli eventi che sia bel tempo o piova. Per la formula di fattorizzazione vale:

$$\begin{aligned} P(X > \lambda) &= P(X > \lambda|b)P(b) + P(X > \lambda|p)P(p) \\ &= P(X^b > \lambda)P(b) + P(X^p > \lambda)P(p) \\ &= 0.95 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 = .905, \end{aligned}$$

quindi

$$P(X < \lambda) = 1 - 0.\,905 = 0.0\,95.$$

Sol: (ii): Per $i = 1, ..., 100$, indichiamo con X_i la v.a. di Bernoulli che vale 1 se il giorno i-esimo è sfortunato, cosa che avviene con probabilità $0.0\,95$. Poniamo

$N = X_1 + ... + X_{100}$. Essa è una $B(100; 0.095)$ e rappresenta il numero di giorni sfortunati su 100 giorni. Vale $E[N] = 9.5$,

$$P(N = 20) = \binom{100}{20} 0.095^{20} 0.905^{80} \sim e^{-9.5} \frac{9.5^{20}}{20!}$$

dove alla fine abbiamo usato il teorema degli eventi rari.
Sol. (iii): $P\left(X^b > \lambda\right) = 0.95$ significa $P\left(X^b < \lambda\right) = 0.05$, ovvero $\Phi(\lambda - \mu) = 0.05$, $\lambda - \mu = q_{0.05}$. $P(X^p > \lambda) = 0.8$ significa $\lambda - \mu + \theta = q_{0.2}$, quindi $\theta = q_{0.2} - q_{0.05}$.

Es. 18

Nei giorni di bel tempo, le vendite di un negozio del centro sono descritte da una v.a. gaussiana $X^b \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Quando piove, si osserva un calo medio delle vendite, descritte ora da una v.a. gaussiana $X^p \sim N\left(\mu - \theta, \sigma^2\right)$. Le vendite relative a giorni diversi si possono considerare indipendenti.
Chiamiamo sfortunati i giorni in cui il valore delle vendite risulta inferiore a 18.

i. Supponiamo che sia $P\left(X^b > 18\right) = 0.97$, mentre $P(X^p > 18) = 0.75$. Supponiamo che piova 3 giorni su 10, mediamente. Calcolare la probabilità che un generico giorno sia sfortunato.
ii. Il gestore del negozio sostiene che, in 100 giorni lavorativi, il numero medio di giorni sfortunati è inferiore a 10 e la probabilità di osservarne 20 è circa $e^{-9.6}\frac{9.6^{20}}{20!}$. Spiegare quali considerazioni rigorose supportano le opinioni del gestore.
iii. Supponiamo $\sigma^2 = 1$. Trovare il valore della diminuzione media θ di cui si è parlato al punto (i): verificare che vale $\theta = q_{0.25} - q_{0.03}$.

Sol. (i):

$$P(X > \lambda) = P(X > \lambda|b)P(b) + P(X > \lambda|p)P(p) = 0.97 \cdot 0.7 + 0.75 \cdot 0.3 = .904,$$

$$P(X < \lambda) = 1 - 0.904 = 0.096.$$

Sol: (ii): $N = X_1 + ... + X_{100} \sim B(100; 0.096)$, $E[N] = 9.6$,

$$P(N = 20) = \binom{100}{20} 0.096^{20} 0.904^{80} \sim e^{-9.6} \frac{9.6^{20}}{20!}.$$

Sol. (iii): $P\left(X^b > \lambda\right) = 0.90$ significa $P\left(X^b < \lambda\right) = 0.05$, $\Phi(\lambda - \mu) = 0.05$, $\lambda - \mu = q_{0.05}$. $P(X^p > \lambda) = 0.8$ significa $\lambda - \mu + \theta = q_{0.2}$, quindi $\theta = q_{0.25} - q_{0.03}$.

Es. 19

Nei giorni di bel tempo, le vendite di un negozio del centro sono descritte da una v.a. gaussiana $X^b \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Quando piove, si osserva un calo medio delle vendite, descritte ora da una v.a. gaussiana $X^p \sim N\left(\mu - \theta, \sigma^2\right)$. Le vendite relative a giorni diversi si possono considerare indipendenti.
Chiamiamo sfortunati i giorni in cui il valore delle vendite risulta inferiore a 32.

i. Supponiamo che sia $P\left(X^b > 32\right) = 0.96$, mentre $P\left(X^p > 32\right) = 0.84$. Supponiamo che piova 3 giorni su 10, mediamente. Calcolare la probabilità che un generico giorno sia sfortunato.
ii. Il gestore del negozio sostiene che, in 100 giorni lavorativi, il numero medio di giorni sfortunati è inferiore a 10 e la probabilità di osservarne 20 è circa $e^{-7.6}\frac{7.6^{20}}{20!}$. Spiegare quali considerazioni rigorose supportano le opinioni del gestore.
iii. Supponiamo $\sigma^2 = 1$. Trovare il valore della diminuzione media θ di cui si è parlato al punto (i): verificare che vale $\theta = q_{0.16} - q_{0.04}$.

Sol. (i):

$$P(X > \lambda) = P(X > \lambda|b)P(b) + P(X > \lambda|p)P(p) = 0.96 \cdot 0.7 + 0.84 \cdot 0.3 = .924,$$

$$P(X < \lambda) = 1 - 0.924 = 0.076.$$

Sol: (ii): $N = X_1 + ... + X_{100} \sim B\left(100; 0.076\right)$, $E\left[N\right] = 7.6$,

$$P\left(N = 20\right) = \binom{100}{20} 0.076^{20} 0.924^{80} \sim e^{-7.6}\frac{7.6^{20}}{20!}.$$

Sol. (iii): $P\left(X^b > \lambda\right) = 0.95$ significa $P\left(X^b < \lambda\right) = 0.05$, $\Phi\left(\lambda - \mu\right) = 0.05$, $\lambda - \mu = q_{0.05}$. $P\left(X^p > \lambda\right) = 0.8$ significa $\lambda - \mu + \theta = q_{0.2}$, quindi $\theta = q_{0.2} - q_{0.05}$.

Es. 20

Nei giorni di bel tempo, le vendite di un negozio del centro sono descritte da una v.a. gaussiana $X^b \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Quando piove, si osserva un calo medio delle vendite, descritte ora da una v.a. gaussiana $X^p \sim N\left(\mu - \theta, \sigma^2\right)$. Le vendite relative a giorni diversi si possono considerare indipendenti.
Chiamiamo sfortunati i giorni in cui il valore delle vendite risulta inferiore a 28.

i. Supponiamo che sia $P\left(X^b > 28\right) = 0.95$, mentre $P\left(X^p > 28\right) = 0.85$. Supponiamo che piova 3 giorni su 10, mediamente. Calcolare la probabilità che un generico giorno sia sfortunato.
ii. Il gestore del negozio sostiene che, in 100 giorni lavorativi, il numero medio di giorni sfortunati è inferiore a 10 e la probabilità di osservarne 20 è circa $e^{-8}\frac{8^{20}}{20!}$. Spiegare quali considerazioni rigorose supportano le opinioni del gestore.
iii. Supponiamo $\sigma^2 = 1$. Trovare il valore della diminuzione media θ di cui si è parlato al punto (i): verificare che vale $\theta = q_{0.15} - q_{0.05}$.

Sol. (i):

$$P(X > \lambda) = P(X > \lambda|b)P(b) + P(X > \lambda|p)P(p) = 0.95 \cdot 0.7 + 0.85 \cdot 0.3 = .92,$$

$$P(X < \lambda) = 1 - 0.92 = 0.08.$$

Sol: (ii): $N = X_1 + ... + X_{100} \sim B\left(100; 0.08\right)$, $E\left[N\right] = 8$,

$$P\left(N = 20\right) = \binom{100}{20} 0.08^{20} 0.92^{80} \sim e^{-8}\frac{8^{20}}{20!}.$$

Sol. (iii): $P\left(X^b > \lambda\right) = 0.95$ significa $P\left(X^b < \lambda\right) = 0.05$, $\Phi\left(\lambda - \mu\right) = 0.05$, $\lambda - \mu = q_{0.05}$. $P\left(X^p > \lambda\right) = 0.85$ significa $\lambda - \mu + \theta = q_{0.15}$, quindi $\theta = q_{0.15} - q_{0.05}$.