Metodi Matematici e Statistici
Modulo di Statistica, Ing. Gestionale
Esercitazione del 29 Marzo 2007

Siano X una v.a. di Poisson di parametro λ, Y una v.a. che vale 1 con probabilità p, 2 con probabilità $1-p$, X e Y indipendenti, $Z = X^a Y^b$ $(a, b, = 1, 2,\ a+b=3,\ a', b'$ scelta complementare in (ii)). Calcolare

i) media e varianza di Y

ii)

$$E[\alpha Z + \beta X^{a'} + \gamma Y^{b'}], \quad E\left[(Y-\delta)^3\right]$$

iii)

$$Var\left[\varepsilon X - \eta Y + \theta\right], \quad E\left[e^{\xi X + \rho Y + \varsigma}\right]$$

iv)

$$P\left(Y^2 \leq \tau\right), \quad P\left(Z = n\right)$$

1 Soluzioni

i)

$$E\left[Y\right] = p + 2\left(1-p\right) = 2 - p, \quad Var\left[Y\right] = E\left[Y^2\right] - \mu_Y^2 = p + 4\left(1-p\right) - \left(p + 2\left(1-p\right)\right)^2 = p - p^2.$$

ii)

$$E[\alpha Z + \beta X^{a'} + \gamma Y^{b'}] = \alpha E[X^a]E[Y^b] + \beta E[X^{a'}] + \gamma E[Y^{b'}]$$

e si devono usare le formule:

$$E\left[X\right] = \lambda, \quad E\left[X^2\right] = Var\left[X\right] + \mu_X^2 = \lambda + \lambda^2$$
$$E\left[Y\right] = 2 - p, \quad E\left[Y^2\right] = p + 4\left(1-p\right) = 4 - 3p.$$

$$E\left[(Y-\delta)^3\right] = (1-\delta)^3 p + (2-\delta)^3 (1-p)$$

iii)

$$Var\left[\varepsilon X - \eta Y + \theta\right] = \varepsilon^2 Var\left[X\right] + \eta^2 Var\left[Y\right]$$

$$E\left[e^{\xi X + \rho Y + \varsigma}\right] = E\left[e^{\xi X}\right] E\left[e^{\rho Y}\right] e^{\varsigma} = e^{\lambda\left(e^{\xi}-1\right)} \left(e^{\rho} p + e^{2\rho}\left(1-p\right)\right) e^{\varsigma}$$

iv)

$$P\left(Y^2 \leq \tau\right) = P\left(-\sqrt{\tau} \leq Y \leq \sqrt{\tau}\right) = P\left(0 \leq Y \leq \sqrt{\tau}\right) = ...$$

a seconda dei casi.

$$\begin{aligned}
P(Z=n) &= P\left(X^a Y^b = n\right) \\
&= P\left(X^a Y^b = n | Y^b = 1\right) P\left(Y^b = 1\right) + P\left(X^a Y^b = n | Y^b = 2^b\right) P\left(Y^b = 2^b\right) \\
&= P\left(X^a 1 = n\right) P\left(Y^b = 1\right) + P\left(X^a 2^b = n\right) P\left(Y^b = 2^b\right) \\
&= P\left(X^a = n\right) p + P\left(X^a 2^b = n\right) (1-p)
\end{aligned}$$