Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 17/9/2011

Esercizio 1. Il numero di clienti che ordina un certo modello di frigorifero in un grande negozio, in dieci giorni di prova, è

$$12, 17, 21, 18, 15, 23, 14, 20, 19, 14.$$

i) Che precisione relativa sul numero medio giornaliero di ordinazioni si può ottenere, con questi dati, se si si accetta un rischio del 10% di avere un risultato fasullo?

ii) Supponiamo che questa indagine sia stata svolta per allestire un magazzino in grado di servire sul momento tutte le ordinazioni giornaliere, almeno 7 giorni su 10. Quanti esemplari vanno tenuti in magazzino?

iii) Se, nella risoluzione del punto (ii) si tiene conto dell'incertezza sulla stima della media, che valore cautelativo prendereste del numero di esemplari da tenere in magazzino?

iv) Come rispondereste al punto (ii) se voleste usare una distribuzione discreta per descrivere il numero di ordinazioni? Possibilmente, esporre la soluzione per due diverse distribuzioni discrete. Non è richiesto il valore numerico finale ma solo la formulazione che potrebbe essere utilizzata con pazienza tramite una calcolatrice.

v) Tempo dopo viene progettata una campagna pubblicitaria per incrementare le ordinazioni, avendo in mente di esaminare statisticamente se la campagna avrà avuto effetto. Cosa progettate di fare (dal punto di vista delle analisi statistiche)?

Esercizio 2. Siano $X \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $Y \sim N(-1, 4)$ indipendenti.

i) Calcolare la funzione generatrice della v.a. $\frac{X}{1+X}$.

ii) Calcolare la media di $\frac{XY}{1+X}$.

iii) Calcolare $P(X + Y > 0)$.

iv) Trovare λ tale che $P(Y < \lambda) = 0.1$.

v) Trovare λ tale che $P(|Y + 1| > \lambda) = 0.1$. Se non si riesce, in alternativa calcolare $P(|Y + 1| > 1)$.

1 Soluzioni

Esercizio 1.

x<-c(12,17,21,18,15,23,14,20,19,14)
mean(x)
[1] 17.3
sd(x)
[1] 3.529243
i)

$$\left|\frac{\overline{x}-\mu}{\mu}\right| \approx \left|\frac{\overline{x}-\mu}{\overline{x}}\right| \leq \frac{1}{17.3}\frac{3.529 \cdot q_{0.95}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{17.3}\frac{3.529 \cdot 1.64}{\sqrt{10}} = 0.106.$$

Un errore del 10% circa. Ipotizzando ovviamente che il numero di ordinazioni sia una gaussiana, altrimenti il risultato sarà solo approssimativamente questo, per il TLC.

ii) Cerchiamo λ tale che, se N indica il numero di ordinazioni,

$$P(N \leq \lambda) \geq 0.7.$$

In ipotesi di gaussianità,

$$\lambda = \mu + \sigma q_{0.7} \approx 17.3 + 3.529 \cdot 0.524 = 19.149.$$

Vanno quindi tenuti circa 19 esemplari (meglio 20).

iii) A livello di confidenza del 90%, dobbiamo accettare l'idea che la media vera possa essere anche

$$\mu = \overline{x} + \frac{3.529 \cdot q_{0.95}}{\sqrt{10}} = 17.3 + \frac{3.529 \cdot 1.64}{\sqrt{10}} = 19.13.$$

Se così fosse, troveremmo

$$\lambda \approx 19.13 + 3.529 \cdot 0.524 = 20.979.$$

Vanno quindi tenuti 21 esemplari

iv) Innanzi tutto bisogna decidere la distribuzione. Andrebbe visto un istogramma ma accontentiamoci di ragionamenti sui momenti. Se N fosse una Poisson, dovrebbe avere media e varianza uguali; la varianza è $3.529243^2 = 12.456$ che è abbastanza diversa dalla media, anche se non enormemente (l'ordine di grandezza è quello). Se scegliamo una Poisson, decidendo che stimiamo λ con $\overline{x} = 17.3$, dobbiamo trovare il più piccolo n intero positivo tale che $P(N \leq n) \geq 0.7$, ovvero

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-17.3} \frac{17.3^k}{k!} \geq 0.7.$$

Visto che n sarà maggiore della media, rinunciamo a cercarlo numericamente per tentativi (in realtà con poche prove si scopre che è $n = 19$).

Se invece scegliamo una binomiale, dobbiamo trovare n e p tali che

$$np = 17.3$$
$$np(1-p) = 12.456.$$

Deve valere $1 - p = \frac{12.456}{17.3}$, quindi $p = 1 - \frac{12.456}{17.3} = 0.28$, $n = \frac{17.3}{0.28} = 61.786$. Si intende che n deve essere intero e quindi prendiamo ad esempio $n = 62$. A questo punto il problema diventa quello di trovare il più piccolo m intero positivo tale che $P(N \leq m) \geq 0.7$, ovvero

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{62}{k} 0.28^k 0.72^{62-k} \geq 0.7$$

problema numericamente più complicato del precedente.

v) A questa domanda si può rispondere descrivendo il test che si intende eseguire, eventualmente corredato da un DOE per avere una data potenza.

Più precisamente, andrebbe detto che ha senso fare e conviene il test unilaterale destro, e visto che si esprimeranno le formule per eseguirlo o per il calcolo del valore p, andrebbe specificato chi si prende come μ_0 e come $\overline{x}$. Inoltre, in fase di progetto (che il cuore dell'esercizio) va scelta la numerosità delle osservazioni da eseguire, cosa che si può fare imponendo una certa potenza.

Esercizio 2. La v.a. $Z = \frac{X}{1+X}$ assume il valore $\frac{0}{1+0} = 0$ con probabilità $\frac{1}{2}$, ed il valore $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ con probabilità $\frac{1}{2}$, quindi

$$\varphi_{\frac{X}{1+X}}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t}.$$

ii)

$$E\left[\frac{XY}{1+X}\right] = E[Y]\, E\left[\frac{X}{1+X}\right] = -E\left[\frac{X}{1+X}\right].$$

Come sopra, $E\left[\frac{X}{1+X}\right]=0\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, quindi $E\left[\frac{XY}{1+X}\right]=-\frac{1}{4}$.

iii)

$$\begin{aligned}P(X+Y>0)&=P(X+Y>0|X=0)\,P(X=0)+P(X+Y>0|X=1)\,P(X=1)\\&=\frac{1}{2}P(Y>0)+\frac{1}{2}P(1+Y>0)=\frac{1}{2}\left(1-\Phi\left(\frac{0+1}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}(1-0.6914)+\frac{1}{4}=0.4043.\end{aligned}$$

iv) $P(Y<\lambda)=0.1$ equivale a $\Phi\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)=0.1$, ovvero $\frac{\lambda+1}{2}=q_{0.1}=-1.28$,

$$\lambda=-1-2\cdot 1.28=-3.56.$$

v) I seguenti calcoli si possono svolgere in vari modi ed in particolare risultano seplici usando bene un disegno. La condizione $|Y+1|>\lambda$ descrive i valori di Y che distano da -1 più di λ, quindi le semirette $(-1+\lambda,\infty)$ e $(-\infty,-1-\lambda)$. Quindi dev'essere

$$P(Y>-1+\lambda)+P(Y<-1-\lambda)=0.1.$$

Le due probabilità sono uguali, quindi la condizione è

$$2P(Y<-1-\lambda)=0.1$$

ovvero $2\Phi\left(\frac{-1-\lambda+1}{2}\right)=0.1$, $\frac{-\lambda}{2}=q_{0.05}=-1.64$,

$$\lambda=2\cdot 1.64=3.28.$$