Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 14/09/2010

Esercizio 1. i) Calcolare la funzione generatrice dei momenti nel punto $t = \log_e 1$ per una v.a. Z che sia la somma $Z = X + Y$ di una $X \sim B(1, 0.2)$ ed una $Y \sim B(1, 0.5)$ indipendenti.

1, 2, 3

ii) Se $W \sim N(3, 9)$, trovare λ tale che $P(W > \lambda) = 0.2$.

5.52, 4.87, 6.39

iii-iv) Con le notazioni precedenti, supponendo che W sia indipendente da X ed Y, calcolare $P(Z = 1)$

0.5, 0.2, 0.8

e $P(Z |W - 3| \geq 1)$.

0.4572, 0.3264, 0.2693

v) Se $Y_1, ..., Y_7$ sono distribuite come Y e sono indipendenti, calcolare $P(Y_1 + ... + Y_7 > 5)$.

0.0625, 0.1254, 0.2185

Esercizio 2. Una ditta italiana che produce calzature, nei primi anni del 2000 era convinta di avere un mercato europeo consolidato. L'arrivo nel 2006 della concorrenza di una ditta straniera extraeuropea potrebbe però avere avuto un'influenza negativa. La ditta italiana sa che fino al 2005 il profitto medio mensile era di 35.8 con deviazione standard 4.2 (in una certa unità). Nei 12 mesi successivi alla stabilizzazione sul mercato della nuova ditta straniera, il profitto medio empirico è risultato pari a 32.4.

i) E' più ragionevole pensare che la ditta straniera abbia fatto diminuire il profitto oppure che la diminuzione sia stata puramente causale?

Spiegare che ragionamenti sono stati svolti.

ii) Nella nuova situazione, usando i nuovi parametri, che probabilità c'è di avere un profitto mensile superiore a 40?

$$0.035, \qquad 0.025, \qquad 0.015$$

iii) La valutazione appena fatta soffre del fatto che abbiamo usato il valore medio empirico 32.4 ottenuto con solo 12 osservazioni. Con 24 osservazioni, all'incirca che errore relativo ci aspettiamo di commettere, al 95%?

$$5,2\%, \qquad 4,2\%, \qquad 6,2\%$$

iv) Si lascia assestare ancora un po' il mercato. Esaminiamo un'ipotesi che potrebbe essere vera, ma che non si può conoscere con certezza: supponiamo che tre anni dopo ci si trovi nella situazione che la ditta straniera abbia davvero rosicchiato una quota di mercato ed il profitto medio (teorico) della ditta italiana si sia assestato sul valore 33.5; si osservi che la ditta non può conosce questi fatti (può solo fare osservazioni per stimare i valori), quindi si tratta di un'ipotesi. Supponiamo che questa ipotesi si sia avverata. Con 12 nuove osservazioni ed eseguendo il relativo test, che probabilità c'è di concludere che c'è stata una diminuzione del profitto, relativamente ad $\alpha = 0.05$?

$$0.6, \qquad 0.5, \qquad 0.4$$

v) Immaginiamo invece un'altra situazione: che l'entrata in gioco della nuova ditta non modifichi il profitto medio mensile di 35.8 ma forse renda più incerto il mercato, cioè aumenti la deviazione dalla media. Supponiamo che la varianza empirica delle 12 osservazioni abbia dato il valore 22.5. Al 95% possiamo concludere che è aumentata l'incertezza?

no, *sì*

1 Soluzioni

Esercizio 1. i)

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t) = \left(0.2 \cdot e^t + 0.8\right)\left(0.5 \cdot e^t + 0.5\right)$$
$$\varphi_Z(\log_e 1) = \left(0.2 \cdot e^{\log_e 1} + 0.8\right)\left(0.5 \cdot e^{\log_e 1} + 0.5\right) = (0.2 + 0.8)(0.5 + 0.5) = 1.$$

ii)

$$\lambda = 3 + 3 \cdot q_{0.8} = 3 + 3 \cdot 0.84 = 5.52.$$

iii-iv) Si osservi che $Z = 0, 1, 2$, con probabilità

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P(X = 0, Y = 0) = 0.8 \cdot 0.5 = 0.4 \\ P(Z = 2) &= P(X = 1, Y = 1) = 0.2 \cdot 0.5 = 0.1 \\ P(Z = 1) &= 1 - 0.4 - 0.1 = 0.5. \end{aligned}$$

Inoltre, detta U una gaussiana canonica,

$$\begin{aligned} P(|W - 3| \geq \lambda) &= P\left(\left|\frac{W-3}{3}\right| \geq \frac{\lambda}{3}\right) = P\left(|U| \geq \frac{\lambda}{3}\right) \\ &= 1 - P\left(|U| < \frac{\lambda}{3}\right) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{\lambda}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{\lambda}{3}\right)\right] \\ &= 2 - 2\Phi\left(\frac{\lambda}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z\,|W - 3| \geq 1) &= P(Z\,|W - 3| \geq 1 | Z = 0)\,P(Z = 0) + ... \\ &= P(0 \cdot |W - 3| \geq 1) \cdot 0.4 + P(1 \cdot |W - 3| \geq 1) \cdot 0.5 + P(2 \cdot |W - 3| \geq 1) \cdot 0.1 \\ &= P(|W - 3| \geq 1) \cdot 0.5 + P(|W - 3| \geq 0.5) \cdot 0.1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(2 - 2\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right) \cdot 0.5 + \left(2 - 2\Phi\left(\frac{0.5}{3}\right)\right) \cdot 0.1 \\ &= (2 - 2 \cdot 0.6293) \cdot 0.5 + (2 - 2 \cdot 0.5675) \cdot 0.1 = 0.4572. \end{aligned}$$

v) La v.a. $S = Y_1 + ... + Y_7$ è una $B(7, 0.5)$, quindi

$$P(S > 5) = P(S = 6) + P(S = 7) = \binom{7}{6} 0.5^6 \cdot 0.5 + \binom{7}{7} 0.5^7 = 0.0625.$$

Esercizio 2. i) Si esegue un test unilaterale per la media con $\mu_0 = 35.8$, $\sigma = 4.2$, $\overline{x} = 32.4$, $n = 12$. Si calcola il valore sperimentale della v.a. $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, che è $z = \frac{32.4 - 35.8}{4.2}\sqrt{12} = -2.8043$. Il valore p risulta uguale a

$$P(Z < -2.8043) = \Phi(-2.8043) = 1 - \Phi(2.8043) = 1 - 0.9974 = 0.0026.$$

Due millesimi è un valore molto piccolo, che ci porta a ritenere che la nuova ditta abbia conquistato una quota di mercato.

ii)

$$P\left(X>40\right)=1-\Phi\left(\frac{40-32.4}{4.2}\right)=1-\Phi\left(1.81\right)=1-0.9649=0.035.$$

iii) L'errore assoluto è

$$\delta=\frac{\sigma q_{0.975}}{\sqrt{n}}=\frac{4.2\cdot 1.96}{\sqrt{24}}=1.68$$

quindi ci aspettiamo un errore relativo è circa pari a

$$\frac{\delta}{32.4}=\frac{1.68}{32.4}=0.052.$$

iv) La v.a. $\overline{X}$ è ora $N\left(33.5,\frac{4.2^2}{12}\right)$ e dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}
P\left(Z<-1.64\right)&=P\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}<-1.64\right)=P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}+\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}<-1.64\right)\\
&=\Phi\left(-1.64-\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)=\Phi\left(-1.64-\frac{33.5-35.8}{4.2}\sqrt{12}\right)\\
&=\Phi\left(0.257\right)=0.6.
\end{aligned}$$

v) Calcoliamo

$$\frac{S^2}{\sigma_0^2}\left(n-1\right)=\frac{22.5}{4.2^2}\left(12-1\right)=14.031$$

e lo confrontiamo col quantile $\chi^2_{\alpha,n-1}$ con $\alpha=0.05$ ed $n=12$, ovvero $\chi^2_{0.05,11}=19.675$. Il quantile non è superato, non possiamo concludere che l'incertezza è aumentata.