Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 12/05/2012

Cerchiare, su questo foglio, le risposte corrette e risolvere per esteso gli esercizi sui fogli assegnati.

Esercizio 1. Un produttore di stoffa vende una quantità variabile di merce di settimana in settimana. Per un lungo periodo, la quantità media venduta settimanalmente è 320, con una deviazione standard pari a 52.

Viene apportato un miglioramento alla produzione che ha migliorato la qualità della stoffa. Si vuole vedere se il mercato reagisce positivamente al miglioramento. Dopo un periodo di adattamento, si procede ad un'analisi statistica della reazione del mercato.

i) (4 pt) Stabilire quante settimane servono per stimare la nuova quantità media venduta settimanalmente, con una precisione relativa del 90%, con livello di fiducia del 90%. Impostare in modo esaustivo il problema, senza usare formulette preconfezionate.

, , , , 8.

ii) (4 pt) Si registrano 10 valori di vendita settimanali per fare un test. Descrivere il test unilaterale destro al 90% che svolgereste per capire se il mercato risponde positivamente e calcolare la propabilità di concludere, con tale test, che la risposta del mercato sia positiva, nel caso in cui il vero valor medio delle vendite fosse pari a 350. Scrivere matematicamente la probabilità richiesta e, partendo da lì, ricavare il risultato, usando solamente le formule riportate sotto.

, , , , 0.7067.

iii) (3 pt) Coi 10 valori trovati, se essi hanno media aritmetica pari a 334, che intervallo date per la media vera al 90%?

iv) (3 pt) Con probabilità 0.8, su quale quantità minima di vendita si può contare? Spiegare come si è ottenuto il risultato.

, , , , 290.2.

v) (4 pt) Considerando anche l'incertezza al 90% sulla stima della media, qual'è la nuova valutazione della quantità minima di vendita? Spiegare bene come va interpretato il risultato dal punto di vista di confidenza ecc.

, , , , 263. 25.

vi) (4 pt) Supponiamo che le vendite settimanali siano inferiori a certe aspettative con probabilità 0.2. In due mesi, ovvero 9 settimane, che probabilità c'è di avere due o più settimane inferiori alle aspettative? Descrivere dettagliatamente le v.a. che si utilizzano.

, , , , 0.5638.

Esercizio 2. i) (3 pt) Calcolare la media della v.a. $X-1$, dove $X \sim B(2, 0.2)$.

, , , , -0.6.

ii) (2 pt) Se $Y \sim N(1, 9)$, calcolare $P(|Y-1| < 1)$.

, , , , 0.261.

iii) (3 pt) Supponendo X ed Y indipendenti, calcolare la media della v.a. $\frac{XY}{X+1}$.

, , , , 0.1867.

Quantili utili per questo compito:

$x =$	0.333	0.544	0.842	1.28	1.64	1.96	2.537	3.297
$\Phi(x) =$	0.6304	0.7067	0.8	0.9	0.95	0.975	0.994	0.9995

Formule e teoremi potenzialmente utili. 1) Se X è $B(n,p)$, allora $P(N=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E[X] = np$, $Var[X] = np(1-p)$; se X è $\mathcal{P}(\lambda)$, allora $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, $E[X] = Var[X] = \lambda$; se X è esponenziale di parametro λ, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $E[X] = \sigma[X] = \frac{1}{\lambda}$. 2) Se $X_1, ..., X_n$ sono $N(\mu, \sigma^2)$, allora $P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \leq \frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$. 3) Se $X_1, ..., X_n$ sono $N(\mu, \sigma^2)$, allora $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ è una $N(d, 1)$ con $d = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$.

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) La precisione assoluta è $\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$, quella relativa $\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}|\mu|}$. Approssimiamo questo numero con $\frac{52 q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}320}$. Vogliamo $\alpha = 0.1$, $\frac{\alpha}{2} = 0.05$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$, quindi $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = q_{0.95} = 1.64$. Imponiamo che la precisione relativa sia del 90%, quindi cerchiamo il più piccolo n tale che $\frac{52 \cdot 1.64}{\sqrt{n}320} \leq 0.1$, quindi

$$n \geq \left(\frac{52 \cdot 1.64}{320 \cdot 0.1} \right)^2 = 7.102.$$

Basta un campione di numerosità 8.

ii) Il test unilaterale destro al 90% consiste nel calcolare $z = \frac{\overline{x}-320}{52}\sqrt{10}$ e confrontarlo con $q_{0.9} = 1.28$, nel senso che se risulta $z > q_{0.9}$, si rifiuta l'ipotesi nulla che la media fosse 320. Dobbiamo calcolare $P_{\mu=350}\left(Z \geq q_{0.9}\right)$ dove $Z = \frac{\overline{X}-320}{52}\sqrt{10}$. Risulta

$$Z \sim N(d, 1), \qquad d = \frac{350 - 320}{52}\sqrt{10} = 1.8244$$

in quanto la media vera ora è 350, $\overline{X}$ proviene da una $N(350, 52)$. Vale

$$\begin{aligned} P_{\mu=350}\left(Z \geq q_{0.9}\right) &= 1 - \Phi\left(q_{0.9} - d\right) = 1 - \Phi\left(1.28 - 1.8244\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-0.544\right) = \Phi\left(0.544\right) = 0.7067. \end{aligned}$$

iii)

$$\mu = 334 \pm \frac{52 \cdot 1.64}{\sqrt{10}} = 334 \pm 26.968.$$

iv) La quantità minima è

$$\lambda = 334 - 52 \cdot q_{0.8} = 334 - 52 \cdot 0.842 = 290.2.$$

La spiegazione di questa formula si può fare nei soliti modi (grafico o coi calcoli).

v) La media vera non è 334 ma, al 90% (cioè con livello di fiducia 90% che ciò che stiamo per dire sia corretto) è compresa tra $334 - 26.968 = 307.03$ e $334 + 26.968 = 360.97$. Nell'ottica del minimo di produzione, la situzione peggiore è che sia $\mu = 307.03$. Se questo accade, il livello minimo di produzione, con rischio 10%, è

$$\lambda = 307.03 - 52 \cdot q_{0.8} = 307.03 - 52 \cdot 0.842 = 263.25.$$

Abbiamo una confidenza pari al 90% che 90 giorni su 100 venga prodotta questa quantità di pezzi.

vi) Indichiamo con $X_1, ..., X_9$ delle Bernoulli di parametro $p = 0.2$ che indicano se le rispettive settimane sono state sotto le aspettative. Il numero N

di settimane sotto le aspettative è la somma $X_1 + ... + X_9$ che, per un noto teorema, è una binomiale $B(9, 0.2)$, quindi

$$P(N \geq 2) = \sum_{k=2}^{9} \binom{9}{k} 0.2^k 0.8^{9-k} = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{9}{k} 0.2^k 0.8^{9-k} = 0.5638.$$

Esercizio 2. i) $P(X = 0) = 0.64$, $P(X = 1) = 0.32$, $P(X = 2) = 0.04$, quindi

$$E[X - 1] = E[X] - 1 = 0.32 + 2 \cdot 0.04 - 1 = -0.6.$$

Siccome è noto che $E[X] = 2 \cdot 0.4 = 0.4$, si può anche abbreviare così (nel punto iii servono invece le probabilità associate ad X).

ii)

$$\begin{aligned} P(|Y - 1| < 1) &= P(-1 < Y - 1 < 1) = P(0 < Y < 2) \\ &= \Phi\left(\frac{2-1}{3}\right) - \Phi\left(\frac{0-1}{3}\right) \\ &= \Phi(0.333) - \Phi(-0.333) \\ &= 2 \cdot \Phi(0.333) - 1 = 2 \cdot 0.6304 - 1 \\ &= 0.261. \end{aligned}$$

iii)

$$E\left[\frac{XY}{X+1}\right] = E\left[\frac{X}{X+1}\right] E[Y] = E\left[\frac{X}{X+1}\right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0}{0+1} \cdot P(X = 0) + \frac{1}{1+1} \cdot P(X = 1) + \frac{2}{2+1} \cdot P(X = 2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0.32 + \frac{2}{3} \cdot 0.04 = 0.1867. \end{aligned}$$