Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 5/7/2011

Esercizio 1. Una certa pizzeria, di sabato sera, serve normalmente 53,2 pizze in media, con una deviazione standard pari a 12,7. Da un po' di tempo a questa parte il gestore ha l'impressione che ci sia un calo di clienti, per cui decide di segnarsi per alcune settimane il numero di pizze vendute il sabato sera.

i) Quante settimane gli servono per avere una stima della media con una precisione del 10%, a livello di confidenza del 90%?

ii) Decide di segnarsi le cose per 9 settimane (due mesi). Riscontra una media aritmetica pari a $\overline{x} = 48.8$ pizze. Cosa conclude?

iii) Quale calo delle vendite verrebbe individuato da test a 95%, con una potenza dell'80%?

iv) Accettando che la media sia 48.8, nel 70% dei casi cosa è sicuro di vendere?

Esercizio 2. Nel seguito, $X_1, ..., X_n$ sono Bernoulli $B(1, 0.2)$ mentre $Y_1, ..., Y_n$ sono gaussiane $N(0, 4)$. Si suppongano tutte le variabili indipendenti.

i) Calcolare $P(X_1 + X_2 > 1)$.

ii) Calcolare $P(X_1 + Y_1 > 1)$.

iii) Calcolare $E\left[Y_1^2 X_1 e^{-X_1}\right]$.

iv) Trovare λ tale che $P(Y_1 + ... + Y_{20} < \lambda) = 0.9$, spiegando che regole si stanno usando.

v) Trovare λ tale che $P(X_1 + ... + X_{40} < \lambda) = 0.9$, spiegando che regole si stanno usando.

vi) Trovare il più piccolo intero k tale che $P(X_1 + ... + X_4 \leq k) \geq 0.9$, spiegando che regole si stanno usando.

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) Precisione del 10% significa che

$$\frac{\delta}{\mu} = \frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\mu\sqrt{n}} \leq 0.1$$

dove $\sigma = 12.7$, $\alpha = 0.1$ quindi $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = q_{0.95} = 1.65$, μ dovrebbe essere la media vera attuale in mancanza della quale prendiamo $\mu = 53.2$, ed n è incognito. Quindi

$$\sqrt{n} \geq \frac{12.7 \cdot 1.65}{0.1 \cdot 53.2} = 3.938\,9$$
$$n \geq 3.938\,9^2 = 15.515$$

quindi $n = 16$.

ii) Eseguiamo un test unilaterale sinistro, vista la convinzione che le vendite siano in calo. Calcoliamo il valore p. Esso è la probabilità che l'indicatore statistico sia più estremo del valore sperimentale, ovvero (nel caso unilaterale sinistro)

$$p = P(Z < -0.3465) = \Phi(-0.3465) = 1 - \Phi(0.3465) = 0.36$$

dove Z è una gaussiana canonica, e dove abbiamo usato il valore sperimentale

$$\frac{48.8 - 53.2}{12.7}\sqrt{9} = -0.346\,46.$$

Il valore p è decisamente alto (nettamente speriore a 0.05), quindi pensiamo che le vendite siano nella norma.

iii) Abbiamo svolto un test unilaterale sinistro, quindi abbiamo calcolato $Z = \frac{\overline{X}-53.2}{12.7}\sqrt{9}$ poi confrontata con $-q_{0.95} = -1.65$. Ma Z, nell'ipotesi di media pari a μ, non è $N(0,1)$, bensì $N\left(\frac{\mu-53.2}{12.7}\sqrt{9}, 1\right)$. Poniamo $d = \frac{\mu-53.2}{12.7}\sqrt{9}$. La potenza è

$$P(Z < -q_{0.95}) = \Phi(-q_{0.95} - d) = \Phi(-1.65 - d)$$

e vogliamo che sia pari a 0.8. Pertanto dobbiamo risolvere l'equazione $\Phi(-1.65 - d) = 0.8$, ovvero $-1.65 - d = q_{0.8} = 0.84$, ovvero $d = -1.65 - 0.84$, ovvero $\frac{\mu-53.2}{12.7}\sqrt{9} = -2.49$,

$$\mu = \frac{-2.49 \cdot 12.7}{\sqrt{9}} + 53.2 = 42.659.$$

iv) Cerchiamo λ tale che (dette V le vendite)

$$P(V \geq \lambda) = 0.7$$

0vvero

$$\lambda = 48.8 - 12.7 \cdot q_{0.7} = 48.8 - 12.7 \cdot 0.52 = 42.196.$$

Esercizio 2. i) La v.a. $X_1 + X_2$ è $B(2, 0.2)$ quindi

$$P(X_1 + X_2 > 1) = P(X_1 + X_2 = 2) = \binom{2}{2} 0.2^2 0.8^0 = 0.04$$

ii)

$$\begin{aligned} P(X_1 + Y_1 > 1) &= P(X_1 + Y_1 > 1 | X_1 = 0) P(X_1 = 0) + P(X_1 + Y_1 > 1 | X_1 = 1) P(X_1 = 1) \\ &= P(Y_1 > 1) \cdot 0.8 + P(1 + Y_1 > 1) \cdot 0.2 \\ &= \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot 0.8 + (1 - \Phi(0)) \cdot 0.2 \\ &= (1 - 0.6915) \cdot 0.8 + (1 - 0.5) \cdot 0.2 = 0.346\,8. \end{aligned}$$

iii)

$$E\left[Y_1^2 X_1 e^{-X_1}\right] = E\left[Y_1^2\right] E\left[X_1 e^{-X_1}\right] = 4 \cdot E\left[X_1 e^{-X_1}\right].$$

La v.a. $X_1 e^{-X_1}$ vale $1 \cdot e^{-1}$ con probabilità 0.2 e zero altrimenti, quindi $E\left[X_1 e^{-X_1}\right] = 1 \cdot e^{-1} \cdot 0.2 = 7.357\,6 \times 10^{-2}$. In conclusione

$$E\left[Y_1^2 X_1 e^{-X_1}\right] = 4 \cdot 7.357\,6 \times 10^{-2} = 0.294\,3.$$

iv) La v.a. $S = Y_1 + ... + Y_{20}$ è una $N(0, 20 \cdot 4)$ quindi

$$\lambda = 0 + \sqrt{20 \cdot 4} \cdot q_{0.9} = \sqrt{20 \cdot 4} \cdot 1.28 = 11.449.$$

v) La v.a. $S = X_1 + ... + X_{40}$ è una $B(40, 0.2)$, il valore cercato non è calcolabile esattamente, ma per il TLC

$$\begin{aligned} P(X_1 + ... + X_{40} < \lambda) &= P\left(\frac{X_1 + ... + X_{40} - 40 \cdot 0.2}{\sqrt{40}\sqrt{0.2 \cdot 0.8}} < \frac{\lambda - 40 \cdot 0.2}{\sqrt{40}\sqrt{0.2 \cdot 0.8}}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{\lambda - 40 \cdot 0.2}{\sqrt{40}\sqrt{0.2 \cdot 0.8}}\right) \end{aligned}$$

che deve valere 0.9, quindi

$$\frac{\lambda - 40 \cdot 0.2}{\sqrt{40}\sqrt{0.2 \cdot 0.8}} = q_{0.9} = 1.28$$

da cui

$$\lambda = 1.28 \cdot \sqrt{40}\sqrt{0.2 \cdot 0.8} + 40 \cdot 0.2 = 11.238.$$

vi) Di nuovo $S = X_1 + ... + X_4$ è una $B(4, 0.2)$, non possiamo usare però il TLC. Quindi cerchiamo k tale che

$$P(S \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(S = i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{4}{i} 0.2^i 0.8^{4-i} \geq 0.9.$$

Vale

$$\begin{aligned} i = 0 &: \binom{4}{0} 0.2^0 0.8^{4-0} = 0.409\,6 \\ i = 1 &: \binom{4}{1} 0.2^1 0.8^{4-1} = 0.409\,6 \\ i = 2 &: \binom{4}{2} 0.2^2 0.8^{4-2} = 0.153\,6 \end{aligned}$$

la cui somma è $0.409\,6 + 0.409\,6 + 0.153\,6 = 0.972\,8$ maggiore di 0.9, mentre la somma dei primi due è minore di 0.9. Quindi $k = 2$.