Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 19/7/2011

Esercizio 1. Un dirigente, in vista della riunione di inizio luglio del consiglio di amministrazione della sua azienda, osserva, a fine giugno, il grafico dei valori settimanali dei guadagni della sua azienda negli ultime 25 settimane. Il guadagno medio è di 1253 con una deviazione standard di 328. Ad inizio d'anno, il consiglio di amministrazione aveva indicato come obiettivo un guadagno medio di 1500.

i) Che considerazioni statistiche può portare il dirigente alla riunione?

ii) In verità, il grafico ha un andamento in lieve crescita, per cui la media delle ultime 10 settimane è di 1415. Questo dato cambia qualcosa nelle considerazioni che si possono fare?

iii) Se si suppone che il dato delle ultime dieci settimane e sia rappresentativo per il futuro, su quale guadagno si può contare per il mese di luglio con probabilità 0.9?

iv) Dieci settimane sono ovviamente poche per confidare pienamente nel valore 1415. Quante ne servirebbero per sperare al 90% che l'errore commesso non superi 100?

v) Supponiamo che nei mesi successivi le cose vadano meglio e la media vera si assesti al valore 1500. Supponiamo però che un test al 95% eseguito su 15 valori settimanali risulti significativo, porti cioè al rifiuto dell'ipotesi che la media sia 1500. Che valori devono essere emersi dalla media di quelle 15 settimane?

Esercizio 2. i) Calcolare la funzione generatrice della v.a. X^2, dove $X \sim B(1, 0.3)$.

ii) La v.a. $(X - 0.3) \cdot X^2$ ha media nulla?

iii) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 1)$ dove X_1 e X_2 sono copie indipendenti di X.

iv) Se $Y \sim N(0, 9)$ è indipendente da X, calcolare $P(0 < XY < 1)$.

v) Trovare λ tale che $P(Y > \lambda) = 0.1$.

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) Può anche ragionare portando un intervallo di confidenza attorno a 1500 e mostrando dove si colloca 1253. Equivalentemente, può eseguire un test, o meglio calcolare il p-value. Dichiarare cioè che il valore 1253 (o più precisamente l'insieme di quelli più estremi di lui) ha probabilità di accadere causalmente, se la media vera è 1500, pari a

$$P\left(|Z| > \left|\frac{1253 - 1500}{328}\sqrt{25}\right|\right) = P\left(|Z| > 3.765\,2\right)$$

che è infinitesima. E' impossibile che la media settimanale sia 1500.

ii) Usando solo le ultime 10 settimane si ottiene

$$\begin{aligned} P\left(|Z| > \left|\frac{1415 - 1500}{328}\sqrt{10}\right|\right) &= P\left(|Z| > 0.819\,49\right) \\ &= P\left(Z > 0.819\,49\right) + P\left(Z < -0.819\,49\right) \\ &= 2 \cdot 0.2062 = 0.412\,4 \end{aligned}$$

quindi il valore 1415 è perfettamente compatibile con un'ipotesi di media 1500.

iii) Detto λ tale guadagno, deve essere $P\left(G > \lambda\right) = 0.9$, quindi

$$\lambda = 1415 - 328 \cdot q_{0.9} = 1415 - 328 \cdot 1.28 = 995.\,16.$$

iv) Imponiamo

$$\frac{328 \cdot q_{0.95}}{\sqrt{n}} \leq 100$$

quindi

$$n \geq \left(\frac{328 \cdot 1.64}{100}\right)^2 = 28.\,936.$$

Basterebbero quindi 29 settimane in tutto.

v) Il test si esegue confrontando $\frac{\overline{x}-1500}{328}\sqrt{15}$ con $q_{0.975} = 1.96$ e risulta significativo se

$$\left|\frac{\overline{x} - 1500}{328}\sqrt{15}\right| > 1.96$$

ovvero se

$$|\overline{x} - 1500| > \frac{1.96 \cdot 328}{\sqrt{15}} = 165.\,99.$$

Quindi deve accadere che

$$\overline{x} > 1500 + 165.99 = 1666$$

oppure

$$\overline{x} < 1500 - 165.99 = 1334.$$

Esercizio 2. i) $e^{tX^2} = e^{t \cdot 0} = 1$ con probabilità 0.7, $e^{tX^2} = e^{t \cdot 1} = e^t$ con probabilità 0.3, quindi

$$\varphi_X(t) = 0.7 + 0.3e^t.$$

Tra l'altro, essendo $X^2 \sim B(1, 0.3)$, sapevamo già il risultato.

ii) No: $(X - 0.3) \cdot X^2$ vale $(0 - 0.3) \cdot 0 = 0$ con probabilità 0.7, $(1 - 0.3) \cdot 1 = 0.7$ con probabilità 0.3, quindi

$$E\left[(X - 0.3) \cdot X^2\right] = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21.$$

iii) $X_1 + X_2 \sim B(2, 0.3)$, quindi

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 1) &= P(X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 + X_2 = 1) \\ &= \binom{2}{0} 0.3^0 0.7^2 + \binom{2}{1} 0.3^1 0.7^1 = 0.91. \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} P(0 < XY < 1) &= P(0 < XY < 1 | X = 0) P(X = 0) + P(0 < XY < 1 | X = 1) P(X = 1) \\ &= P(0 < 0 < 1) P(X = 0) + P(0 < Y < 1) P(X = 1) \\ &= 0.3\left(\Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 0.5\right) = 0.3(0.6306 - 0.5) = 0.03918. \end{aligned}$$

v)

$$\lambda = 3 \cdot q_{0.9} = 3 \cdot 1.28 = 3.84.$$