**Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 06/06/2012**

Cerchiare, su questo foglio, le risposte corrette e risolvere per esteso gli esercizi sui fogli assegnati.

**Esercizio 1.** Viene misurato il traffico ad un casello autostradale. Nelle ore di punta dei giorni feriali il numero medio di passaggi ogni ora è di 207 vetture, con una deviazione standard pari a 32.

i) (3 pt) Due sportelli aperti servono bene fino a 240 passaggi, di più no. Se si decide di descrivere il numero di passaggi con una gaussiana, e si tengono due sportelli aperti, che probabilità c'è di avere un buon servizio?

0.1874, 0.8487, 0.7184, 0.4871.

ii) (3 pt) Supponiamo che il numero di moto si descriva meglio con una v.a. esponenziale di media 10. Che probabilità c'è che arrivino più di 20 moto?

0.335, 0.135, 0.351, 0.153, 0.535.

iii) (3 pt) Ogni autovettura paga in media 10 euro. Che incasso minimo ci sia aspetta dalle autovetture, al 90%?

2159.9, 1959.9, 2659.9, 1659.9.

iv) (4 pt) Si vuole stimare il numero medio di passaggi all'ora, anche in orari forse un po' meno frequentati. Si vuole una precisione reativa del 5%. Quanti giorni di osservazione servono? Impostare in modo esaustivo il problema, senza usare formulette preconfezionate. La confidenza voluta è del 90%.

16, 19, 22, 25, 28.

v) (4 pt) Registrati i passaggi relativi a 20 giorni, in orari meno frequentati, si vuole capire se sia vero che sono meno frequentati, oppure al contrario non c'è differenza tra un orario e l'altro. Descrivere il test unilaterale sinistro al 90% che svolgereste per capire se c'è differenza e calcolare la probabilità di concludere, con tale test, che c'è differenza, nel caso in cui il vero numero medio di passaggi nelle ore meno frequentate fosse pari a 170. Scrivere matematicamente la probabilità richiesta e, partendo da lì, ricavare il risultato, usando solamente le formule riportate sotto.

0.95, 0.995, 0.9995, 0.99995.

vi) (4 pt) Supponiamo che ogni autovettura paghi una tariffa che varia in modo gaussiano di media 10 euro e deviazione 5. Che probabilità c'è che 50 passaggi portino ad un incasso superiore a 600 euro? Spiegare accuratamente la risuluzione.

0.0124, 0.1224, 0.0024, 0.0004.

**Esercizio 2.** i) (3 pt) Sia $X$ una v.a. che assume i valori $a$ e $-a$ con egual probabilità. Trovare $a$ in modo che $Var[X] = 1$.

$$0.5, \qquad 1, \qquad 1.5, \qquad 2, \qquad 2.5.$$

ii) (3 pt) Se $X_1, X_2$ sono due copie indipendenti di $X$, calcolare $P(|X_1 + X_2| \leq 1)$.

$$0.5, \qquad 1, \qquad 1.5, \qquad 2, \qquad 2.5.$$

iii) (3 pt) Calcolare la funzione generatrice di $X_1 + X_2$ nel punto $t = 1$.

$$1.3811, \qquad 2.3811, \qquad 3.3811, \qquad 4.3811.$$

**Quantili utili per questo compito:**

| $x =$ | 0.333 | 0.544 | 1.031 | 1.2815 | 2.828 | 3.889 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Phi(x) =$ | 0.6304 | 0.7067 | 0.8487 | 0.9 | 0.9976 | 0.99995 |

**Formule e teoremi potenzialmente utili**. 1) Se $X$ è $B(n,p)$, allora $P(N=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E[X] = np$, $Var[X] = np(1-p)$; se $X$ è $\mathcal{P}(\lambda)$, allora $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $E[X] = Var[X] = \lambda$; se $X$ è esponenziale di parametro $\lambda$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $E[X] = \sigma[X] = \frac{1}{\lambda}$. 2) Se $X_1, ..., X_n$ sono $N(\mu, \sigma^2)$, allora $P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \leq \frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$. 3) Se $X_1, ..., X_n$ sono $N(\mu, \sigma^2)$, allora $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ è una $N(d, 1)$ con $d = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$.

# 1 Soluzioni

**Esercizio 1.** i) Il numero $N$ di passaggi è una $N\left(207, 32^2\right)$. Si chiede di calcolare

$$P(N \leq 240) = \Phi\left(\frac{240-207}{32}\right) = \Phi(1.031) = 0.8487.$$

ii) Il numero $N$ di moto è una $Exp(\lambda)$. Vale $E[N] = 10$, che è $\frac{1}{\lambda}$, quindi $\lambda = \frac{1}{10}$. Pertanto

$$P(N > 20) = e^{-\frac{1}{10}20} = e^{-2} = 0.135.$$

iii) L'incasso sarà pari a $10 \cdot x$ dove $x$ è il numero minimo di autovetture che ci sia aspetta, al 90%. Il numero $x$ è dato da

$$x = \mu - \sigma q_{0.9} = 207 - 32 \cdot 1.2815 = 165.99.$$

Quindi l'incasso minimo sarà pari a 1659.9.

iv) La precisione assoluta nella stima della media al 90% è $\frac{\sigma q_{0.9}}{\sqrt{n}}$, quella relativa quindi è $\frac{\sigma q_{0.9}}{|\mu|\sqrt{n}}$. Sostituiamo i dati ragionevolmente in nostro possesso: $\frac{\sigma q_{0.9}}{|\mu|\sqrt{n}} \sim \frac{32 \cdot 1.2815}{|207|\sqrt{n}}$ (per la media possiamo solo usare la media delle ore di punta, unico dato noto). Si impone che sia $\frac{32 \cdot 1.2815}{207\sqrt{n}} \leq 0.05$, quindi $\sqrt{n} \geq \frac{32 \cdot 1.2815}{207 \cdot 0.05} = 3.\ 9621$, quindi $n \geq 3.\ 9621^2 = 15.\ 698$. Si deve trovare il più piccolo $n$ intero che soddisfa questa richiesta, quindi $n = 16$.

v) Il test consiste nel calcolare $z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{\overline{x}-207}{32}\sqrt{20}$ e confrontarlo con $-q_{0.9}$: se $z < -q_{0.9}$, il test è significativo (c'è differenza tra le due fasce orarie). Se il vero numero medio fosse 170, cioè $\overline{X}$ provenisse da una $N\left(170, 32^2\right)$, la probabilità da calcolare sarebbe

$$P_{170}\left(\frac{\overline{X}-207}{32}\sqrt{20} < -q_{0.9}\right) = \Phi(-q_{0.9} - d)$$

dove $d = \frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{170-207}{32}\sqrt{20} = -5.\ 170\,9$, quindi

$$= \Phi(-1.2815 + 5.\ 170\,9) = \Phi(3.889\,4) = 0.99995.$$

vi) Sol. Siano $X_1, ..., X_{50}$ gli incassi, $N\left(10, 5^2\right)$, e sia $S = X_1 + ... + X_{50}$ l'incasso complessivo. E' $S \sim N\left(10 \cdot 50, 5^2 \cdot 50\right)$. Dobbiamo calcolare

$$P(S > 600) = 1 - \Phi\left(\frac{600-500}{5\sqrt{50}}\right) = 1 - \Phi(2.828)$$
$$= 1 - 0.9976 = 0.0024.$$

**Esercizio 2.** i) Sol. La media è zero. Quindi

$$Var[X] = E\left[X^2\right] = a^2$$

quindi dev'essere $a = 1$.

ii) Sol: $X_1 + X_2$ può assumere i valori -2, 0, 2, quindi

$$\begin{aligned} P\left(|X_1 + X_2| \leq 1\right) &= P\left(X_1 + X_2 = 0\right) \\ &= P\left(X_1 = a, X_2 = -a\right) + P\left(X_1 = -a, X_2 = a\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

iii) Sol:

$$\varphi_{X_1+X_2}\left(t\right) = \varphi_{X_1}\left(t\right)\varphi_{X_2}\left(t\right) = \varphi_X^2\left(t\right)$$

$$\varphi_X\left(t\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^t\right)$$

$$\varphi_{X_1+X_2}\left(t\right) = \frac{1}{4}\left(e^{-t} + e^t\right)^2$$

$$\varphi_{X_1+X_2}\left(1\right) = \frac{1}{4}\left(e^{-1} + e^1\right)^2 = 2.3811.$$