Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 16/06/2011

Esercizio 1. i) Se $X \sim N(0,4)$, trovare λ tale che $P(X > \lambda) = 0.05$.

ii) Sia $Y \sim B(1, 0.5)$, $Z \sim N(0,9)$, X, Y, Z indipendenti. Calcolare $P(XY < 1)$.

iii) Calcolare $E\left[YZ^2e^Y\right]$.

vi) Se $Y_1, ..., Y_{50}$ sono distribuite come Y e sono indipendenti, calcolare $P(Y_1 + ... + Y_{50} < 27)$ spiegando che regole si stanno usando.

v) Se $X_1, ..., X_{50}$ sono distribuite come X e sono indipendenti, calcolare $P(X_1 + ... + X_{50} < 20)$ spiegando che regole si stanno usando.

vi) Calcolare $P(|Z - 3| > 1)$.

Esercizio 2. Un'azienda di cosmetici sa che la vendita media giornaliera di un certo prodotto è pari a 6.5 con deviazione standard 1.3. Si chiede se opportune promozioni possono influire sulle vendite di quel prodotto. Fa promozione per un certo periodo e registra le vendite giornaliere per 15 giorni, ottenendo una media aritmetica $\overline{x} = 7.2$.

i) Come valutereste quantitativamente se la promozione ha avuto effetto?

ii) Durante il regime di promozione, come calcolereste la probabilità che le vendite giornaliere siano maggiori di 8?

iii) Calcolare l'errore della stima della media sotto promozione, al 90%, errore potenzialmente commesso col campione di numerosità 15. Come si può dimezzare tale errore?

iv) Supponiamo che il valore delle vendite sia salito da 6.5 a 7 (non sappiamo di quanto è salito, si sta facendo un'ipotesi). Con che probabilità ci accorgeremmo che c'è stato un aumento, seguendo la metodologia del punto (i) applicata relativamente alla scelta $\alpha = 0.05$?

1 Soluzioni

Esercizio 1. i)

$$\lambda = 0 + 2 \cdot q_{0.95} = 2 \cdot 1.65 = 3.3$$

ii)

$$P(XY < 1) = P(XY < 1|Y = 0)\, P(Y = 0) + P(XY < 1|Y = 1)\, P(Y = 1)$$
$$= 0.5 \cdot P(0 < 1) + 0.5 \cdot P(X < 1) = 0.5 + 0.5 \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.5 + 0.5 \cdot 0.6915 = 0.845\,75.$$

iii)

$$E\left[YZ^2e^Y\right] = E\left[Ye^Y\right] E\left[Z^2\right] = 9 \cdot E\left[Ye^Y\right].$$

Inoltre, Ye^Y assume i valori 0 con probabilità 0.5 ed e con probabilità 0.5, per cui

$$E\left[Ye^Y\right] = 0.5 \cdot e.$$

In conclusione

$$E\left[YZ^2e^Y\right] = 9 \cdot 0.5 \cdot e = 12.\,232.$$

vi)

$$P(Y_1 + ... + Y_{50} < 27) = P\left(\frac{Y_1 + ... + Y_{50} - 50 \cdot 0.5}{\sqrt{50}\sqrt{0.5 \cdot 0.5}} < 0.565\,69\right).$$

Per il teorema limite centrale, questa probabilità vale, approssimativamente,

$$\Phi(0.565\,69) = 0.7141.$$

v)

La v.a. $S = X_1 + ... + X_{50}$ è una $N(0, 50 \cdot 4)$ quindi

$$P(Y_1 + ... + Y_{50} < 20) = \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{50 \cdot 4}}\right) = \Phi(1.\,414\,2) = 0.9213.$$

vi)

$$P(|Z - 3| > 1) = P(Z > 4) + P(Z < 2) = 1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= 1 - 0.9088 + 0.7475 = 0.838\,7.$$

Esercizio 2. i) Con un test per la media, unilaterale visto che ci si aspetta fortemente che se c'è un cambiamento esso sia in aumento. Siccome la significatività non è assegnata, o si decide di sceglierne una, oppure (meglio) si calcola il valore p del test. Esso è la probabilità che l'indicatore statistico sia più estremo del valore sperimentale, ovvero (nel caso unilaterale destro)

$$p = P(Z > 2.085\,5) = 1 - \Phi(2.085\,5) = 1 - 0.9815 = 0.018\,5$$

dove Z è una gaussiana canonica, e dove abbiamo usato il valore sperimentale

$$\frac{7.2-6.5}{1.3}\sqrt{15}=2.0855.$$

Il valore p è piuttosto piccolo (inferiore a 0.05), quindi pensiamo che la promozione abbia avuto effetto.

ii)

$$P(V>8)=1-\Phi\left(\frac{8-7.2}{1.3}\right)=1-\Phi(0.61538)=1-0.7308=0.2692.$$

iii)

$$\delta=\frac{1.3\cdot q_{0.95}}{\sqrt{15}}=\frac{1.3\cdot 1.65}{\sqrt{15}}=0.55384.$$

Per dimezzarlo, bisogna quadruplicare la numerosità.

iv) Nel punto (i) abbiamo svolto un test unilaterale destro, quindi calcolato $Z=\frac{\overline{X}-6.5}{1.3}\sqrt{15}$ poi confrontata con $q_{0.95}=1.65$. Ma Z, nell'ipotesi di media pari a 7, non è $N(0,1)$, bensì $N\left(\frac{7-6.5}{1.3}\sqrt{15},1\right)$. Poniamo $d=\frac{7-6.5}{1.3}\sqrt{15}=1.4896$. Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned}P(Z>q_{0.95})&=1-\Phi(q_{0.95}-d)=1-\Phi(1.65-1.4896)=1-\Phi(0.1604)\\&=1-0.5637=0.4363.\end{aligned}$$

Naturalmente si tratta della potenza del test, per quel valore del cambiamento.