Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 30/06/2011

Esercizio 1. Nel seguito, $X, X_1, ..., X_n$ sono gaussiane $N(0,9)$ mentre $Y, Y_1, ..., Y_n$ sono Bernoulli $B(1,0.7)$. Si suppongano tutte le variabili indipendenti.

i) Calcolare $E\left[(2Y-1)^3\right]$.

ii) Calcolare $E\left[YX^2e^Y\right]$.

iii) Calcolare $P(X_1+X_2>0)$.

iv) Trovare λ tale che $P(X<\lambda)=0.05$.

v) Calcolare $P(X_1+...+X_{40}<30)$ spiegando che regole si stanno usando.

vi) Calcolare $P(Y_1+...+Y_{40}<30)$ spiegando che regole si stanno usando.

Esercizio 2. Un negozio di libri sa che normalmente vende 27.3 libri al giorno, con una deviazione standard pari a 6.2. Ad un certo momento apre nelle vicinanze un punto vendita di una grande catena di libri. Insospettito circa il potenziale calo di vendite, registra le vendite giornaliere per 18 giorni, ottenendo una media aritmetica giornaliera pari a $\overline{x}=23.8$.

i) Quanto è precisa questa stima, al 90%, in percentuale al volume di vendite giornaliere?

ii) Con questa stima, quanto può essere sicuro di vendere giornalmente, al 90%?

iii) E' giusto ritenere che ci sia stato un calo sistematico delle vendite oppure può trattarsi di una fluttuazione casuale?

iv) Se il valore medio vero delle vendite fosse sceso a 22.5, eseguendo un test al 95% ce ne accorgeremmo?

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) La v.a. $Z = (2Y-1)^3$ vale $(2\cdot 0-1)^3 = -1$ con probabilità 0.3, $(2\cdot 1-1)^3 = 1$ con probabilità 0.7, quindi

$$E\left[(2Y-1)^3\right] = E[Z] = -1\cdot 0.3 + 1\cdot 0.7 = 0.4.$$

ii)

$$E\left[YX^2e^Y\right] = E\left[Ye^Y\right]E\left[X^2\right] = E\left[Ye^Y\right]\cdot 9.$$

La v.a. $Z = Ye^Y$ vale 0 con probabilità 0.3, e con probabilità 0.7, quindi $E\left[Ye^Y\right] = 0.7\cdot e$. In conclusione

$$E\left[YX^2e^Y\right] = 9\cdot 0.7\cdot e = 17.125.$$

iii) La v.a. X_1+X_2 è $N(0,18)$ quindi $P(X_1+X_2>0) = 0.5$.
iv)

$$\lambda = -3\cdot q_{0.95} = -3\cdot 1.65 = -4.95.$$

v) La v.a. $X_1+...+X_{40}$ è una $N(0,40\cdot 9)$ quindi

$$P(X_1+...+X_{40}<30) = \Phi\left(\frac{30}{\sqrt{40\cdot 9}}\right) = \Phi(1.58) = 0.9429.$$

vi) La v.a. $Y_1+...+Y_{40}$ sarebbe una $B(40,0.7)$ ma da questo fatto è difficile calcolare il risultato. Usando invece il TLC:

$$P(Y_1+...+Y_{40}<30) = P\left(\frac{Y_1+...+Y_{40}-40\cdot 0.7}{\sqrt{40}\sqrt{0.7\cdot 0.3}} < \frac{30-40\cdot 0.7}{\sqrt{40}\sqrt{0.7\cdot 0.3}}\right)$$
$$\simeq \Phi\left(\frac{30-40\cdot 0.7}{\sqrt{40}\sqrt{0.7\cdot 0.3}}\right) = \Phi(0.69) = 0.7549.$$

Esercizio 2. i)

$$\frac{\delta}{23.8} = \frac{6.2\cdot q_{0.95}}{\sqrt{18}\cdot 23.8} = \frac{6.2\cdot 1.65}{\sqrt{18}\cdot 23.8} = 0.10131.$$

La precisione del 10% circa.

ii) Dobbiamo trovare il numero λ tale che $P(V>\lambda) = 0.9$, dove V (= vendita giornaliera) è una $N\left(23.8, 6.2^2\right)$. Quindi

$$\lambda = 23.8 - 6.2\cdot q_{0.9} = 23.8 - 6.2\cdot 1.28 = 15.864.$$

iii) Calcoliamo il valore p di un test per la media, unilaterale sinistro visto che ci si aspetta fortemente che se c'è un cambiamento esso sia in diminuzione. Esso è la probabilità che l'indicatore statistico sia più estremo del valore sperimentale, ovvero (nel caso unilaterale sinistro)

$$p = P(Z<-2.395) = \Phi(-2.395) = 1-\Phi(2.395) = 0.0083$$

dove Z è una gaussiana canonica, e dove abbiamo usato il valore sperimentale

$$\frac{23.8-27.3}{6.2}\sqrt{18}=-2.395.$$

Il valore p è decisamente piccolo (nettamente inferiore a 0.05), quindi pensiamo che la concorrenza stia danneggiando le vendite.

iv) Abbiamo svolto un test unilaterale destro, quindi abbiamo calcolato $Z = \frac{\overline{X}-27.3}{6.2}\sqrt{18}$ poi confrontata con $-q_{0.95} = -1.65$. Ma Z, nell'ipotesi di media pari a 22.5, non è $N(0,1)$, bensì $N\left(\frac{22.5-27.3}{6.2}\sqrt{18},1\right)$. Poniamo $d = \frac{22.5-27.3}{6.2}\sqrt{18} = -3.2846$. Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} P(Z < -q_{0.95}) &= \Phi(-q_{0.95}-d) = \Phi(-1.65+3.2846) \\ &= \Phi(1.6346) = 0.9484. \end{aligned}$$

Naturalmente si tratta della potenza del test, per quel valore del cambiamento. Il valore è moto elevato, quindi ci accoregeremmo del cambiamento.