Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 11/01/2012

Cerchiare, su questo foglio, le risposte corrette e risolvere per esteso gli esercizi sui fogli assegnati.

Esercizio 1. Un'azienda produce componenti per auto. Un suo reparto produce un numero di pezzi giornalieri che varia casualmente di giorno in giorno, per diverse ragioni. Nel 2010, il numero medio di pezzi prodotti giornalmente è 46.3, con una deviazione standard pari a 8.5.

Un ingegnere gestionale ha identificato che certe operazioni di rifornimento dal magazzino sono causa di parte dei ritardi, studia un metodo diverso di collocazione delle merci in magazzino e di rifornimento e lo presenta alla direzione.

i) (3 pt) Si decide di mettere in pratica la sua strategia. La direzione chiede quanti giorni servono per stimare il nuovo numero medio di pezzi prodotti giornalmente, con una precisione relativa del 95%, con livello di fiducia del 95%. Che numero si può fornire, prima di aver effettuato esperimenti? Impostare in modo esaustivo il problema, senza usare formulette preconfezionate.

ii) (3 pt) Si decide di adottare un test unilaterale destro al 90% per capire se il nuovo metodo di rifornimento aumenta la produzione, basato su un campione di numerosità 20. Se la produzione media fosse aumentata di 8.7 unità giornaliere, che probabilità ci sarebbe di accorgersene con questo test? Scrivere matematicamente la probabilità richiesta e, partendo da lì, ricavare il risultato, usando solamente le formule riportate sotto.

Esercizio 2. Una compagnia assicurativa, nel 2005, in 15 giorni di dicembre considerati rappresentativi, ha stipulato il seguente numero di polizze: 5, 11, 5, 7, 4, 9, 11, 9, 10, 10, 12, 13, 4, 7, 10. Nel 2006 fa affidamento su questi dati per fare previsioni.

i) (4 pt) Supponiamo descriva il numero N di polizze stipulate giornalmente con una v.a. esponenziale. Calcolare la probabilità di vendere almeno 7 polizze. Descrivere la risoluzione anche con un disegno.

ii) (4 pt) Supponiamo descriva N con una v.a. di Poisson. Supponiamo che ogni polizza porti un guadagno di 100 euro. Calcolare la probabilità di guadagnare almeno 300 euro.

iii) (4 pt) Supponiamo descriva N con una v.a. gaussiana. Su che guadagno minimo può contare, 4 giorni su 5? Descrivere la risoluzione anche con un disegno.

iv) (4 pt) Sempre supponendo N gaussiana, si supponga che i giorni siano indipendenti e si considerino 5 giorni. Indicare con che v.a. descrivete il numero complessivo di polizze stipulate nei 5 giorni (il totale dei 5 giorni), e calcolare la deviazione standard di tale guadagno complessivo, spiegando che regole state usando.

v) (4 pt) Nel 2007, essendo passato un po' di tempo, decide di controllare se la situazione è invariata. Sceglie prima di tutto un test da eseguire e successivamente raccoglie un campione di numerosità 10, trovando i seguenti valori: 3, 6, 15, 7, 10, 7, 3, 5, 6, 4. Calcolare la probabilità che, relativamente al test scelto a priori, uscisse un valore così estremo dell'indicatore usato per il test. Svolgere il calcolo partendo dalla formulazione ora data della probabilità da calcolare.

Esercizio 3. i) (2 pt) Calcolare la funzione generatrice nel punto $t = \log_e 2$ della v.a. X^2, dove $X \sim B(1, 0.3)$.

ii) (2 pt) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 1)$ dove X_1 e X_2 sono copie indipendenti di X.

Quantili utili per questo compito:

$x =$	-2.582	-1.654	0.8416	1.28	1.85	1.96	2.002	3.297	3.392
$\Phi(x) =$	0.0049	0.049	0.8	0.9	0.967	0.975	0.977	0.9995	0.9996

Formule e teoremi potenzialmente utili. 1) Se X è $B(n,p)$, allora $P(N=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E[X] = np$, $Var[X] = np(1-p)$; se X è $\mathcal{P}(\lambda)$, allora $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $E[X] = Var[X] = \lambda$; se X è esponenziale di parametro λ, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $E[X] = \sigma[X] = \frac{1}{\lambda}$. 2) Se $X_1, ..., X_n$ sono $N(\mu, \sigma^2)$, allora $P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \leq \frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$. 3) Se $X_1, ..., X_n$ sono $N(\mu, \sigma^2)$, allora $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ è una $N(d, 1)$ con $d = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$.

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) La precisione assoluta è $\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$, quella relativa $\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}|\mu|}$. Approssimiamo questo numero con $\frac{8.5 q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}46.3}$. Vogliamo $\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$, quindi $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = q_{0.975} = 1.96$. Imponiamo che la precisione relativa sia del 95%, quindi cerchiamo il più piccolo n tale che $\frac{8.5 \cdot 1.96}{\sqrt{n} \cdot 46.3} \leq 0.1$, quindi

$$n \geq \left(\frac{8.5 \cdot 1.96}{46.3 \cdot 0.05} \right)^2 = 51.79.$$

Basta un campione di numerosità 52.

ii) Il test unilaterale destro al 90% consiste nel calcolare $z = \frac{\overline{x} - 46.3}{8.5}\sqrt{20}$ e confrontarlo con $q_{0.9} = 1.28$, nel senso che se risulta $z > q_{0.9}$, si rifiuta l'ipotesi nulla che la media fosse 46.3. Dobbiamo calcolare $P_{\mu=55}(Z \geq q_{0.9})$ dove $Z = \frac{\overline{X} - 46.3}{8.5}\sqrt{20}$. Risulta

$$Z \sim N(d, 1), \qquad d = \frac{55 - 46.3}{8.5}\sqrt{20} = 4.577$$

in quanto la media vera ora è 55, $\overline{X}$ proviene da una $N(55, 8.5)$. Vale

$$\begin{aligned} P_{\mu=55}(Z \geq q_{0.9}) &= 1 - \Phi(q_{0.9} - d) = 1 - \Phi(1.28 - 4.577) \\ &= 1 - \Phi(-3.297) = \Phi(3.297) = 0.9995. \end{aligned}$$

Esercizio 2. i) [Il disegno della densità esponenziale e della probabilità da calcolare viene qui omesso.]

N è una $Exp(\lambda)$ e $\lambda = \frac{1}{E[X]}$, quindi stimiamo λ con $\frac{1}{\overline{x}}$. Vale $\overline{x} = 8.4667$, quindi $\lambda = \frac{1}{8.4667} = 0.118$. Vale poi $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, quindi

$$P(N \geq 7) = e^{-0.118 \cdot 7} = 0.438.$$

ii) Detta G la v.a. guadagno, vale $G = 100 \cdot N$, quindi

$$P(G \geq 300) = P(100 \cdot N \geq 300) = P(N \geq 3).$$

Ora N è $\mathcal{P}(\lambda)$, dove $\lambda = E[X]$, quindi stimiamo $\lambda = 8.4667$. Pertanto,

$$\begin{aligned} P(N \geq 3) &= 1 - \sum_{k=0}^{2} P(N = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{2} e^{-8.4667} \frac{8.4667^k}{k!} = 0.990. \end{aligned}$$

iii) [Il disegno della densità gaussiana e della soglia da calcolare viene qui omesso.] Detto g il guadagno minimo a meno di probabilità $\frac{1}{5}$, cioè quel numero tale che $P(G > g) = \frac{4}{5}$, riscrivendo il problema nella forma $P(N > g/100) = \frac{4}{5}$,

$$g/100 = \mu - \sigma \cdot q_{\frac{4}{5}} = 8.4667 - 2.9488 \cdot 0.8416 = 5.985$$

quindi $g = 598.5$.

iv) Dette $N_1, ..., N_5$ le v.a. che descrivono le polizze stipulate nei 5 giorni, il totale è $N = N_1 + ... + N_5$ che, per un noto teorema (la combinazione di gaussiane indipendenti è gaussiana; la media della somma è la somma delle medie; la varianza della somma di v.a. indipendenti è la somma delle varianze), è una gaussiana di media $5 \cdot 8.4667 = 42.334$ e varianza $5 \cdot 2.9488^2 = 43.477$. La deviazione standard è quindi $\sqrt{43.477} = 6.594$.

v) Sceglie un test bilaterale. Calcola quindi $z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ dove $\overline{x}$ è la media del nuovo campione, cioè $\overline{x} = 6.6$, μ_0 è la media vecchia, cioè $\mu_0 = 8.4667$, σ è la deviazione vecchia, $n = 10$, quindi

$$z = \frac{6.6 - 8.4667}{2.9488}\sqrt{10} = -2.0018.$$

I test diretto consisterebbe nel confrontare $|z|$ con $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$, scelto α. Si chiede invece di calcolare

$$P(|Z| > |z|) = P(|Z| > 2.0018)$$

dove Z è una $N(0, 1)$. Vale

$$\begin{aligned} P(|Z| > 2.0018) &= 1 - P(|Z| \leq 2.0018) = 1 - P(-2.0018 \leq Z \leq 2.0018) \\ &= 1 - \Phi(2.0018) + \Phi(-2.0018) = 2 - 2 \cdot \Phi(2.0018) \\ &= 2 - 2 \cdot 0.977 = 0.046. \end{aligned}$$

Esercizio 3. i) La v.a. X^2 è ancora $B(1, 0.3)$ quindi $\varphi(t) = 0.3 \cdot e^t + 0.7$. Pertanto $\varphi(\log_e 2) = 0.3 \cdot 2 + 0.7 = 1.3$.

ii) Per un noto teorema, $X_1 + X_2$ è una $B(2, 0.3)$, quindi

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 \leq 1) &= P(X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 + X_2 = 1) = 1 - P(X_1 + X_2 = 2) \\ &= 1 - \binom{2}{2} 0.3^2 (1 - 0.3)^0 = 0.91. \end{aligned}$$