Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto dell'8/02/2011

Esercizio 1. i) Calcolare la funzione generatrice dei momenti nel punto $t = -1$ per una v.a. Z che sia la differenza $Z = X - Y$ di una $X \sim B(1, 0.2)$ ed una $Y \sim B(1, 0.4)$ indipendenti.

ii) Se $W \sim N(-3, 9)$, trovare λ tale che $P(W > \lambda) = 0.1$.

iii) Calcolare $P(|W + 3| \geq 1)$.

iv) Calcolare $P(Z\,|W + 3| \geq 0)$.

v) Se $Y_1, ..., Y_{20}$ sono distribuite come Y e sono indipendenti, calcolare $P(Y_1 + ... + Y_{20} > 1)$.

vi) Se $X_1, ..., X_{40}$ sono distribuite come X e sono indipendenti, cercare di trovare un numero λ tale che $P(X_1 + ... + X_{40} < \lambda) = 0.9$.

vii) Se Z_1, Z_2 sono Poisson indipendenti di parametro 1, calcolare $P(Z_1 + Z_2 \leq 1)$.

viii) Se $W_1, ..., W_{10}$ sono distribuite come W e sono indipendenti, calcolare $P(W_1 + ... + W_{10} > -20)$.

Esercizio 2. Un negozio, a consuntivo di un anno di lavoro, calcola che la vendita media settimanale di un certo prodotto è pari a 21.5 con deviazione standard 3.5. Non troppo soddisfatto dell'andamento, effettua della pubblicità specifica per quel prodotto, per 20 settimane, registrando le vendite settimanali: registra i valori $v_1, ..., v_{20}$, tali che $v_1 + ... + v_{20} = 465$, $v_1^2 + ... + v_{20}^2 = 11064$. Ad occhio il valore è sopra la media.

i) Decidiamo che, a causa della pubblicità, siamo in un nuovo regime di vendite, di cui il campione $v_1, ..., v_{20}$ è rappresentativo per stimare media e deviazione standard. Sulla base di questi dati, che probabilità c'è di vendere meno di 20 alla settimana?

ii) Abbiamo il dubbio che solo 20 rilevazioni siano poche per stimare bene la nuova vendita media settimanale, al 95%. Vorremmo un errore relativo del 10% al massimo. Quante rilevazioni servono?

1 Soluzioni

Esercizio 1. i)

$$\phi_Z(-1) = E\left[e^{-1(X-Y)}\right] = E\left[e^{-X}\right]E\left[e^{Y}\right] = \phi_X(-1)\,\phi_Y(1) = \left(0.2e^{-1}+0.8\right)\left(0.4e^{1}+0.6\right) = 1.474.$$

ii) $P(W>\lambda)=0.1$ equivale a $P(W\le\lambda)=0.9$. In vari modi si arriva a

$$\lambda = -3+\sqrt{9}q_{0.9} = 0.8446.$$

iii)

$$P(|W+3|\ge 1) = P(W\le -4 \text{ oppure } W\ge -2) = P(W\le -4)+P(W\ge -2) = \Phi\left(\frac{-4+3}{3}\right)+1-\Phi\left(\right.$$

$$= 1+0.3707-0.6293 = 0.7414.$$

iv) La v.a. Z assume valore 0 quando $X=0$ e $Y=0$, oppure quando $X=1$ e $Y=1$, quindi con probabilità

$$0.8\cdot 0.6+0.2\cdot 0.4 = 0.56.$$

Inoltre, assume valore 1 quando $X=1$ e $Y=0$, quindi con probabilità $0.2\cdot 0.6 = 0.12$. Ed infine, assume valore -1 quando $X=0$ e $Y=1$, quindi con probabilità $0.8\cdot 0.4 = 0.32$. A posteriori, conveniva calcolare il primo caso per differenza, ma così almeno possiamo verificare che i calcoli siano giusti:

$$0.56+0.12+0.32 = 1.$$

Fatte queste osservazioni preliminari, osserviamo che l'evento $Z\,|W+3|\ge 0$ equivale all'unione degli eventi $\{Z\ge 0\}$ e $\{|W+3|=0\}$, il secondo di probabilità nulla. Quindi

$$P(Z\,|W+3|\ge 0) = P(Z\ge 0) = 0.56+0.12 = 0.68.$$

v) La v.a. $S = Y_1+...+Y_{20}$ è una $B(20,0.4)$ quindi

$$P(Y_1+...+Y_{20}>1) = 1-P(S=0)-P(S=1) = 1-0.6^{20}-20\cdot 0.4\cdot 0.6^{19} = 0.99948.$$

vi) Vale

$$P(X_1+...+X_{40}<\lambda) = P\left(\frac{X_1+...+X_{40}-40\cdot 0.2}{\sqrt{40\cdot 0.2\cdot 0.8}} < \frac{\lambda-40\cdot 0.2}{\sqrt{40\cdot 0.2\cdot 0.8}}\right) \approx \Phi\left(\frac{\lambda-40\cdot 0.2}{\sqrt{40\cdot 0.2\cdot 0.8}}\right)$$

da cui

$$\frac{\lambda-40\cdot 0.2}{\sqrt{40\cdot 0.2\cdot 0.8}} \approx q_{0.9} = 1.28$$

$$\lambda-40\cdot 0.2 \approx 1.28\cdot\sqrt{40\cdot 0.2\cdot 0.8} = 3.2382$$

$$\lambda \approx 3.238\,2 + 40 \cdot 0.2 = 11.238.$$

vii) L'evento $Z_1 + Z_2 \leq 1$ si compone degli eventi $\{Z_1 = 0, Z_2 = 0\}$, $\{Z_1 = 0, Z_2 = 1\}$, $\{Z_1 = 1, Z_2 = 0\}$, quindi ha probabilità

$$e^{-1}e^{-1} + e^{-1}e^{-1} + e^{-1}e^{-1} = 3e^{-2} = 0.406\,01.$$

viii) Le gaussiane sono autoriproducenti quindi la v.a. $S = W_1 + ... + W_{10}$ è una $N(-30, 10 \cdot 9)$ (esattamente, non approssimativamente). Quindi

$$P(W_1 + ... + W_{10} > -20) = 1 - \Phi\left(\frac{-20 + 30}{\sqrt{10 \cdot 9}}\right) = 1 - \Phi(1.05) = 1 - 0.8531 = 0.146\,9.$$

Esercizio 2. Vedere compiti passati.