Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto dell'8/02/2011

Esercizio 1. i) Se $X \sim N(3,7)$, trovare λ tale che $P(X > \lambda) = 0.6$.

ii) Se inoltre $Y \sim B(1, 0.2)$ ed X, Y sono indipendenti, calcolare $P(XY > 0.4)$.

iii) Calcolare $E\left[Y^3 e^{-X}\right]$.

iv) Calcolare $E\left[Y^3 e^{-Y}\right]$.

v) Se $Y_1, ..., Y_{20}$ sono distribuite come Y e sono indipendenti, calcolare $P(Y_1 + ... + Y_{20} > 1)$.

vi) Se $X_1, ..., X_{20}$ sono distribuite come X e sono indipendenti, calcolare $P(X_1 + ... + X_{20} > 65)$.

vii) Se $Y_1, ..., Y_{40}$ sono distribuite come Y e sono indipendenti, cercare di trovare un numero λ tale che $P(Y_1 + ... + Y_{40} < \lambda) = 0.8$.

viii) Date V, W indipendenti, entrambe Poisson di parametro 2, calcolare $P(V + W \leq 2)$.

Esercizio 2. Si vuole monitorare il livello L di rumore (L va considerato come una variabile aleatoria) di un sistema meccanico, dando l'allarme quando L, mediato su un certo numero di osservazioni, supera una certa soglia; si ritiene infatti che il livello di rumore rifletta eventuali mal funzionamenti. Non interessa quindi quando L è troppo basso, ma solo quando è troppo alto. Si misura L in n istanti di tempo ravvicinati, ottenendo i numeri $l_1, ..., l_n$ e si calcola la media $\bar{l}_n$.

i) Innanzi tutto bisogna conoscere le proprietà statistiche di L. Si misura L per 100 volte in condizioni note di buon funzionamento. Si ottengono i valori $l_1 + ... + l_{100} = 315.726$, $l_1^2 + ... + l_{100}^2 = 1124.92$. Stimare $E[L]$ al 95%.

ii) Prendiamo per buoni i valori di media e deviazione ottenuti con l'esperimento precedente. Misuriamo un singolo valore di L in condizioni di buon funzionamento. Tale valore, di quale numero $l_{\max}$ sarà minore, con probabilità 0.95?

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) $P(X > \lambda) = 0.6$ equivale a $P(X \leq \lambda) = 0.4$. In vari modi si arriva a

$$\lambda = 3 + \sqrt{7} q_{0.4} = 2.3297.$$

ii)

$$\begin{aligned} P(XY > 0.4) &= P(XY > 0.4 | Y = 0) P(Y = 0) + P(XY > 0.4 | Y = 1) P(Y = 1) \\ &= P(X > 0.4) P(Y = 1) = \left(1 - \Phi\left(\frac{0.4 - 3}{\sqrt{7}}\right)\right) \cdot 0.2 = (1 - 0.1635) \cdot 0.2 = 0.167\,3. \end{aligned}$$

iii)

$$E\left[Y^3 e^{-X}\right] = E\left[Y^3\right] E\left[e^{-X}\right] = E\left[Y^3\right] \phi_X(-1).$$

La v.a. Y^3 vale 0 se $Y = 0$, 1 se $Y = 1$, quindi è anch'essa $B(1, 0.2)$ e la sua media è 0.2. Quindi

$$E\left[Y^3 e^{-X}\right] = 0.2 \cdot e^{3(-1) + \frac{7(-1)^2}{2}} = 0.329\,74.$$

iv) La v.a. $Y^3 e^{-Y}$ vale 0 se $Y = 0$, $\frac{1}{e}$ se $Y = 1$, quindi

$$E\left[Y^3 e^{-Y}\right] = \frac{1}{e} \cdot 0.2 = 0.0735.$$

v) La v.a. $S = Y_1 + ... + Y_{20}$ è una $B(20, 0.2)$ quindi

$$P(Y_1 + ... + Y_{20} > 1) = 1 - P(S = 0) - P(S = 1) = 1 - 0.8^{20} - 20 \cdot 0.2 \cdot 0.8^{19} = 0.930\,82.$$

vi) Le gaussiane sono autoriproducenti quindi la v.a. $S = X_1 + ... + X_{20}$ è una $N(60, 20 \cdot 7)$ (esattamente, non approssimativamente). Quindi

$$P(X_1 + ... + X_{20} > 65) = 1 - \Phi\left(\frac{65 - 60}{\sqrt{20 \cdot 7}}\right) = 1 - \Phi(0.42) = 1 - 0.6627 = 0.337\,3.$$

vii) Vale

$$P(Y_1 + ... + Y_{40} < \lambda) = P\left(\frac{Y_1 + ... + Y_{40} - 40 \cdot 0.2}{\sqrt{40 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} < \frac{\lambda - 40 \cdot 0.2}{\sqrt{40 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) \approx \Phi\left(\frac{\lambda - 40 \cdot 0.2}{\sqrt{40 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right)$$

da cui

$$\frac{\lambda - 40 \cdot 0.2}{\sqrt{40 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \approx q_{0.8} = 0.84$$

$$\lambda - 40 \cdot 0.2 \approx 0.84 \cdot \sqrt{40 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = 2.125\,1$$

$$\lambda \approx 2.125\,1 + 40 \cdot 0.2 = 10.\,125.$$

viii) Si può scomporre l'evento $V + W \leq 2$ secondo i valori possibili delle due variabili, oppure usare il fatto che $V + W$ è Poisson di parametro 4, da cui

$$P(V + W \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P(V + W = k) = e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2}\right) = 0.238\,1.$$

Esercizio 2. Vedere compiti passati.