Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 22/02/2011

Esercizio 1. Il 30% della popolazione di una città compra un giornale locale che fa pubblicità ad un evento musicale locale. A causa di questo, il 10% dei lettori partecipa all'evento. Invece, solo il 5% di quelli che non leggono il giornale partecipa all'evento.

a) Tra i partecipanti all'evento, mediamente parlando, sono di più quelli che hanno letto il giornale o gli altri? (Non vengono accettate risoluzioni intuitive non basate sulle regole apprese nel corso.)

b) Un giornalaio di periferia vende 7 copie del giornale. Che probabilità c'è che al massimo una di queste persone partecipi all'evento?

c) Sappiamo che di queste sette persone, 3 sono femmine. Che probabilità c'è che, tra queste 7 persone, esattamente due maschi e basta partecipino all'evento?

d) Un giornalaio del centro vende 100 copie del giornale. Che probabilità c'è che partecipino all'evento 12 o meno di questi?

Esercizio 2. Date X v.a. di Bernoulli di parametro 0.2, $Y \sim N(3,4)$, Z Poisson di parametro 1, indipendenti,

a) calcolare $E\left[X^2 e^X\right]$;

b) calcolare $E\left[\frac{Y^2}{X^2+1}\right]$;

c) calcolare $P(-1 < XY < 1)$.

d) calcolare la densità di massa discreta della v.a. XZ.

e) calcolare la funzione generatrice di XZ.

Esercizio 3. a) Da un campione di numerosità 10 ricaviamo le stime $\overline{x} = 45$ ed $S^2 = 23$. Prendendo S^2 come se fosse la varianza vera, accettando di correre un rischio del 2%, in che intervallo riteniamo sia compresa la media vera?

b) Uno studio effettuato in un altro laboratorio dichiara che la media vera è 50. Fino a quale significatività potremmo affermare che i risultati dei due laboratori sono compatibili?

1 Soluzioni

Esercizio 1. a) $G =$ "la persona compara il giornale", $E =$ "la persona partecipa all'evento", $P(G) = 0.3$, $P(E|G) = 0.1$, $P(E|G^c) = 0.05$. Allora

$$P(G|E) = \frac{P(E|G) \cdot P(G)}{P(E)}, \qquad P(G^c|E) = \frac{P(E|G^c) \cdot P(G^c)}{P(E)}$$

quindi basta confrontare i numeratori

$$\begin{aligned} P(E|G) \cdot P(G) &= 0.1 \cdot 0.3 = 0.03 \\ P(E|G^c) \cdot P(G^c) &= 0.05 \cdot 0.7 = 0.035 \end{aligned}$$

(le due probabilità $P(G|E)$ e $P(G^c|E)$ valgono 0461 e 0.538 rispettivamente) quindi è più probabile che un partecipante sia un non lettore (e quindi saranno di più, mediamente parlando, i non lettori).

b) Il numero N di persone che partecipano, tra le 7, è una $B(7, 0.1)$ (ci si può arivare nel solito modo che qui non viene riportato, si vedano le risoluzioni degli altri compiti). Quindi

$$P(N \leq 1) = P(N = 0) + P(N = 1) = \binom{7}{0} 0.1^0 0.9^7 + \binom{7}{1} 0.1^1 0.9^6 = 0.850\,31.$$

c) Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento: $A =$ "nessuna delle tre femmine partecipa, due su quattro dei maschi partecipano". Ipotizzando sempre l'indipendenza, vale

$$P(A) = P(N_F = 0) \cdot P(N_M = 2)$$

dove N_F è il numero di femmine che partecipa, una v.a. $B(3, 0.1)$, e N_M è il numero di maschi che partecipa, una v.a. $B(4, 0.1)$. Allora

$$P(A) = \binom{3}{0} 0.1^0 0.9^3 \cdot \binom{4}{2} 0.1^2 0.9^2 = 0.03542\,9.$$

d) Il numero N di persone che partecipano, tra le 100, è una $B(100, 0.1)$ ma ora il calcolo esplicito è laborioso, quindi, essendo $N = X_1 + ... + X_{100}$ (con ovvi simboli) possiamo applicare il TLC:

$$\begin{aligned} P(X_1 + ... + X_{100} \leq 12) &= P\left(\frac{X_1 + ... + X_{100} - 100 \cdot 0.1}{\sqrt{100}\sqrt{0.1 \cdot 0.9}} \leq \frac{12 - 100 \cdot 0.1}{\sqrt{100}\sqrt{0.1 \cdot 0.9}} \right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{12 - 100 \cdot 0.1}{\sqrt{100}\sqrt{0.1 \cdot 0.9}} \right) = \Phi(0.666\,) = 0.7473. \end{aligned}$$

Esercizio 2. a) La v.a. $X^2 e^X$ assume i valori 0 con probabilità 0.8 ed e con probabilità 0.2, quindi

$$E\left[X^2 e^X\right] = 0.2 \cdot e = 0.543\,66.$$

b) Per l'indipendenza di X ed Y, quindi anche di $\frac{1}{X^2+1}$ ed Y^2, vale

$$E\left[\frac{Y^2}{X^2+1}\right] = E\left[Y^2\right] \cdot E\left[\frac{1}{X^2+1}\right].$$

Inoltre $E\left[Y^2\right] = Var\left[Y\right] + E\left[Y\right]^2 = 4 + 9 = 13$. Infine, $\frac{1}{X^2+1}$ vale 1 con probabilità 0.8 ed $\frac{1}{2}$ con probabilità 0.2, quindi

$$E\left[\frac{1}{X^2+1}\right] = 1 \cdot 0.8 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 0.9.$$

In definitiva,

$$E\left[\frac{Y^2}{X^2+1}\right] = 13 \cdot 0.9 = 11.7.$$

c)

$$\begin{aligned}
& P\left(-1 < XY < 1\right) \\
= \; & P\left(-1 < XY < 1 | X = 0\right) P\left(X = 0\right) + P\left(-1 < XY < 1 | X = 1\right) P\left(X = 1\right) \\
= \; & P\left(-1 < 0 < 1\right) P\left(X = 0\right) + P\left(-1 < Y < 1\right) P\left(X = 1\right) \\
= \; & 1 \cdot 0.8 + \left(\Phi\left(\frac{1-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right)\right) \cdot 0.2 \\
= \; & 1 \cdot 0.8 + (0.1586 - 0.0227) \cdot 0.2 = 0.827\,18.
\end{aligned}$$

d) La v.a. XZ assume il valore 0 in due casi disgiunti:

- se $X = 0$ e Z è qualsisi, quindi con probabilità 0.8
- se $X = 1$ e $Z = 0$, quindi con probabilità $0.2 \cdot e^{-1}$.

Pertanto,

$$p_0 := P\left(XZ = 0\right) = 0.8 + 0.2 \cdot e^{-1} = 0.87358.$$

Invece, per k intero strettamente positivo,

$$p_k := P\left(XZ = k\right) = P\left(X = 1, Z = k\right) = 0.2 \cdot e^{-1} \frac{1^k}{k!}.$$

e) Dobbiamo calcolare

$$E\left[e^{tXZ}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} p_k = 0.87358 + 0.2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1} \frac{1^k}{k!} e^{tk}.$$

Ma noi conosciamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{tk} = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

pertanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}\frac{1^k}{k!}e^{tk} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1}\frac{1^k}{k!}e^{tk} - e^{-1} = e^{\left(e^t-1\right)} - e^{-1}.$$

In definitiva,

$$E\left[e^{tXZ}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}p_k = 0.87358 + 0.2\cdot\left(e^{\left(e^t-1\right)} - e^{-1}\right).$$

Esercizio 3. a) Basta dare l'intervallo di confidenza (il risultato è 45 ± 3.53). b) Basta calcolare il valore p (il risultato è $p = 0.001$).