Statistica I. Ingegneria Gestionale. Scritto del 16/12/2011

Esercizio 1. Un'azienda produce componenti per auto. Un suo reparto produce un numero di pezzi giornalieri che varia casualmente di giorno in giorno, per diverse ragioni. Nel 2010, il numero medio di pezzi prodotti giornalmente è 46.3, con una deviazione standard pari a 8.5.

Un ingegnere gestionale ha identificato che certe operazioni di rifornimento dal magazzino sono causa di parte dei ritardi, studia un metodo diverso di collocazione delle merci in magazzino e di rifornimento e lo presenta alla direzione.

i) (4 pt) Si decide di mettere in pratica la sua strategia. La direzione chiede quanti giorni servono per stimare il nuovo numero medio di pezzi prodotti giornalmente, con una precisione relativa del 95%, con livello di fiducia del 95%. Che numero si può fornire, prima di aver effettuato esperimenti? Impostare in modo esaustivo il problema, senza usare formulette preconfezionate.

ii) (4 pt) Si decide di adottare un test unilaterale destro al 90% per capire se il nuovo metodo di rifornimento aumenta la produzione, basato su un campione di numerosità 20. Se la produzione media fosse aumentata di 8.7 unità giornaliere, che probabilità ci sarebbe di accorgersene con questo test? Scrivere matematicamente la probabilità richiesta e, partendo da lì, ricavare il risultato, usando solamente le formule riportate sotto.

iii) (3 pt) Dopo queste fasi progettuali, viene messo in pratica il nuovo metodo di rifornimento e vengono registrati i valori giornalieri di produzione per 20 giorni. La media dei valori trovati è 51.8. Possiamo affermare che il metodo funziona?

iv) (3 pt) 90 giorni su 100, su quale quantità minima di pezzi prodotti si può contare, in questo nuovo regime di lavoro? Spiegare come si è ottenuto il risultato.

v) (4 pt) Sempre accettando un rischio del 10%, ma considerando anche l'incertezza al 95% sulla stima della media, quanti pezzi vengono prodotti giornalmente, come minimo, in questo nuovo regime di lavoro? Spiegare bene come va interpretato il risultato dal punto di vista di confidenza ecc.

vi) (4 pt) Cambiamo un po' alcuni presupposti del problema. Supponiamo, per idealizzare, che ogni giorno vengano prodotti esattamente 50 pezzi e che ciascuno abbia probabilità 0.05 di essere scadente. Che probabilità abbiamo di trovare almeno un pezzo scadente, in un generico giorno? Descrivere dettagliatamente le v.a. che si utilizzano.

Esercizio 2. i) (2 pt) Calcolare la media della v.a. $|X+1|$, dove $X \sim B(1, 0.2)$.

ii) (3 pt) Sia $Y \sim N(0, 9)$, indipendente da X. Calcolare $P\left(Y^2 < 1\right)$.

iii) (3 pt) Calcolare la media della v.a. $\frac{Y^2}{|X+1|}$.

Quantili utili per questo compito:

$x =$	-2.582	-1.654	0.333	1.28	1.85	1.96	2.537	3.297	3.392
$\Phi(x) =$	0.0049	0.049	0.630	0.9	0.967	0.975	0.994	0.9995	0.9996

Formule e teoremi potenzialmente utili. 1) Se X è $B(n,p)$, allora $P(N=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $E[X]=np$, $Var[X]=np(1-p)$; se X è $\mathcal{P}(\lambda)$, allora $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $E[X]=Var[X]=\lambda$; se X è esponenziale di parametro λ, $F(x)=1-e^{-\lambda x}$, $E[X]=\sigma[X]=\frac{1}{\lambda}$. 2) Se $X_1,...,X_n$ sono $N(\mu,\sigma^2)$, allora $P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|\leq\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$. 3) Se $X_1,...,X_n$ sono $N(\mu,\sigma^2)$, allora $Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ è una $N(d,1)$ con $d=\frac{\mu-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$.

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) La precisione assoluta è $\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$, quella relativa $\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}|\mu|}$. Approssimiamo questo numero con $\frac{8.5 q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}46.3}$. Vogliamo $\alpha = 0.05$, $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$, quindi $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = q_{0.975} = 1.96$. Imponiamo che la precisione relativa sia del 95%, quindi cerchiamo il più piccolo n tale che $\frac{8.5 \cdot 1.96}{\sqrt{n} \cdot 46.3} \leq 0.1$, quindi

$$n \geq \left(\frac{8.5 \cdot 1.96}{46.3 \cdot 0.05} \right)^2 = 51.79.$$

Basta un campione di numerosità 52.

ii) Il test unilaterale destro al 90% consiste nel calcolare $z = \frac{\overline{x} - 46.3}{8.5} \sqrt{20}$ e confrontarlo con $q_{0.9} = 1.28$, nel senso che se risulta $z > q_{0.9}$, si rifiuta l'ipotesi nulla che la media fosse 46.3. Dobbiamo calcolare $P_{\mu=55} \left(Z \geq q_{0.9} \right)$ dove $Z = \frac{\overline{X} - 46.3}{8.5} \sqrt{20}$. Risulta

$$Z \sim N(d, 1), \qquad d = \frac{55 - 46.3}{8.5} \sqrt{20} = 4.577$$

in quanto la media vera ora è 55, $\overline{X}$ proviene da una $N(55, 8.5)$. Vale

$$\begin{aligned} P_{\mu=55} \left(Z \geq q_{0.9} \right) &= 1 - \Phi \left(q_{0.9} - d \right) = 1 - \Phi \left(1.28 - 4.577 \right) \\ &= 1 - \Phi \left(-3.297 \right) = \Phi \left(3.297 \right) = 0.9995. \end{aligned}$$

iii) Applichiamo il test descritto sopra. Calcoliamo $z = \frac{51.8 - 46.3}{8.5} \sqrt{20} = 2.893$. Esso supera $q_{0.9} = 1.28$, quindi il test è significativo. Il nuovo metodo funziona.

iv) La quantità minima è

$$\lambda = 51.8 - 8.5 \cdot q_{0.9} = 51.8 - 8.5 \cdot 1.28 = 40.92.$$

La spiegazione di questa formula si può fare nei soliti modi (grafico o coi calcoli).

v) La media vera non è 51.8 ma, al 95% (cioè con livello di fiducia 95% che ciò che stiamo per dire sia corretto) è compresa tra $51.8 - \frac{8.5 \cdot 1.96}{\sqrt{20}} = 48.075$ e $51.8 + \frac{8.5 \cdot 0.975}{\sqrt{20}} = 55.525$. Nell'ottica del minimo di produzione, la situzione peggiore è che sia $\mu = 48.075$. Se questo accade, il livello minimo di produzione, con rischio 10%, è

$$\lambda = 48.075 - 8.5 \cdot q_{0.9} = 48.075 - 8.5 \cdot 1.28 = 37.195.$$

Abbiamo una confidenza pari al 95% che 90 giorni su 100 venga prodotta questa quantità di pezzi.

vi) Indichiamo con $X_1, ..., X_{50}$, delle Bernoulli di parametro $p = 0.05$ che indicano se i rispettivi pezzi sono scadenti. Il numero N di pezzi scadenti è la somma $X_1 + ... + X_{50}$ che, per un noto teorema, è una binomiale $B(50, 0.05)$, quindi

$$P(N = k) = \binom{50}{k} 0.05^k 0.95^{50-k}.$$

Dobbiamo calcolare $P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0)$ quindi

$$= 1 - \binom{50}{0} 0.05^0 0.95^{50-0} = 1 - 0.95^{50} = 0.923.$$

Esercizio 1. i) Posto $T = |X + 1|$, vale $P(T = |0 + 1| = 1) = P(X = 0) = 0.8$, $P(T = |1 + 1| = 2) = P(X = 1) = 0.2$, quindi

$$E[|X + 1|] = 0.8 + 2 \cdot 0.2 = 1.2.$$

ii)

$$P\left(Y^2 < 1\right) = P(-1 < Y < 1) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{3}\right) = 0.630 - 1 + 0.630 = 0.26$$

iii)

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Y^2}{|X+1|}\right] &= E\left[Y^2\right] E\left[\frac{1}{|X+1|}\right] = Var[Y]\left(0.8 + \frac{1}{2} \cdot 0.2\right) \\ &= 9 \cdot \left(0.8 + \frac{1}{2} \cdot 0.2\right) = 8.1 \end{aligned}$$