Statistica I. Ingegneria Gestionale. Compitino del 13/12/2010

Esercizio 1a. Calcolare le seguenti probabilità, assumendo indipendenti tutte le variabili in gioco: i) $P(X \in [1,5])$ se X è esponenziale di parametro 2

0.135, 0.0, 0.0, 0.0

ii) $P(|Y-1| \leq 1)$ se Y è $N(1,9)$

0.261, 0.0, 0.0, 0.0

iii) $P(ZY \leq 2)$ se Z è una $B(1,0.2)$

0.926, 0.0, 0.0, 0.0

Esercizio 1b. Calcolare le seguenti probabilità, assumendo indipendenti tutte le variabili in gioco: i) $P(X \in [1,5])$ se X è esponenziale di parametro 6

0.002, 0.0, 0.0, 0.0

ii) $P(|Y-2| \leq 2)$ se Y è $N(2,9)$

0.495, 0.0, 0.0, 0.0

iii) $P(ZY \leq 4)$ se Z è una $B(1,0.4)$

0.898, 0.0, 0.0, 0.0

Esercizio 1c. Calcolare le seguenti probabilità, assumendo indipendenti tutte le variabili in gioco: i) $P(X \in [2,5])$ se X è esponenziale di parametro 2

0.018, 0.0, 0.0, 0.0

ii) $P(|Y-1| \leq 1)$ se Y è $N(1,4)$

0.382, 0.0, 0.0, 0.0

iii) $P(ZY \leq 2)$ se Z è una $B(1,0.4)$

0.876, 0.0, 0.0, 0.0

Esercizio 1d. Calcolare le seguenti probabilità, assumendo indipendenti tutte le variabili in gioco: i) $P(X \in [0,5])$ se X è esponenziale di parametro 1

0.993, 0.0, 0.0, 0.0

ii) $P(|Y-2| \leq 2)$ se Y è $N(2,4)$

0.683, 0.0, 0.0, 0.0

iii) $P(ZY \leq 4)$ se Z è una $B(1, 0.2)$

$$0.968, \qquad 0.0, \qquad 0.0, \qquad 0.0$$

Esercizio 2a. i) Se ipotizziamo gaussiane le vendite giornaliere di pane di un negozio, misurate in kg, ed abbiamo le seguenti 10 rilevazioni giornaliere:

$$20, 22, 14, 18, 21, 15, 20, 18, 25, 22$$

quanto pane deve essere tenuto in negozio in un generico giorno per soddisfare tutte le richieste al 90%?

$$23.7, \qquad 0.0, \qquad 0.0, \qquad 0.0$$

ii) Si supponga di tenere tale quantità. Su 6 giorni, che probabilità c'è che almeno un giorno manchi il pane per qualcuno?

$$0.468, \qquad 0.0, \qquad 0.0, \qquad 0.0$$

iii) Su 100 giorni, approssimativamente, che probabilità c'è che manchi il pane più di 15 volte?

$$0.048, \qquad 0.0, \qquad 0.0, \qquad 0.0$$

Esercizio 2b. i) Se ipotizziamo gaussiane le vendite giornaliere di pane di un negozio, misurate in kg, ed abbiamo le seguenti 10 rilevazioni giornaliere:

$$20, 25, 18, 24, 21, 19, 20, 18, 28, 23$$

quanto pane deve essere tenuto in negozio in un generico giorno per soddisfare tutte le richieste al 90%?

$$25.8, \qquad 0.0, \qquad 0.0, \qquad 0.0$$

ii) Si supponga di tenere tale quantità. Su 5 giorni, che probabilità c'è che almeno un giorno manchi il pane per qualcuno?

$$0.409, \qquad 0.0, \qquad 0.0, \qquad 0.0$$

iii) Su 100 giorni, approssimativamente, che probabilità c'è che manchi il pane meno di 15 volte?

$$0.951, \qquad 0.0, \qquad 0.0, \qquad 0.0$$

Esercizio 2c. i) Se ipotizziamo gaussiane le vendite giornaliere di pane di un negozio, misurate in kg, ed abbiamo le seguenti 10 rilevazioni giornaliere:

$$20, 22, 14, 18, 12, 15, 16, 18, 21, 20$$

quanto pane deve essere tenuto in negozio in un generico giorno per soddisfare tutte le richieste all'80%?

$$20.3, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

ii) Si supponga di tenere tale quantità. Su 6 giorni, che probabilità c'è che almeno un giorno manchi il pane per qualcuno?

$$0.738, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

iii) Su 100 giorni, approssimativamente, che probabilità c'è che manchi il pane meno di 15 volte?

$$0.106, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

Esercizio 2d. i) Se ipotizziamo gaussiane le vendite giornaliere di pane di un negozio, misurate in kg, ed abbiamo le seguenti 10 rilevazioni giornaliere:

$$20, 24, 14, 18, 25, 19, 20, 28, 23, 22$$

quanto pane deve essere tenuto in negozio in un generico giorno per soddisfare tutte le richieste all'80%?

$$24.6, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

ii) Si supponga di tenere tale quantità. Su 5 giorni, che probabilità c'è che almeno un giorno manchi il pane per qualcuno?

$$0.672, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

iii) Su 100 giorni, approssimativamente, che probabilità c'è che manchi il pane più di 15 volte?

$$0.894, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

Esercizio 3a. Calcolare i seguenti valori medi: i) $E\left[X^2 e^{Y+3Z}\right]$, dove X, Y, Z sono quelle dell'esercizio 1

$$589.35, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

ii) $E\left[Z^2 e^{Z^2}\right]$

$$0.544, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

Esercizio 3b. Calcolare i seguenti valori medi: i) $E\left[e^{\frac{Y}{2}+Z} X^2\right]$, dove X, Y, Z sono quelle dell'esercizio 1

$$0.785, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

ii) $E\left[Z^2 e^{Z}\right]$

$$1.087, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

Esercizio 3c. Calcolare i seguenti valori medi: i) $E\left[X^2 e^{2Y+Z}\right]$, dove X, Y, Z sono quelle dell'esercizio 1

$$18583, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

ii) $E\left[Ze^{-Z^2}\right]$

$$0.147, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

Esercizio 3d. Calcolare i seguenti valori medi: i) $E\left[e^{Y-Z}X^2\right]$, dove X, Y, Z sono quelle dell'esercizio 1

$$95.391, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

ii) $E\left[Ze^{-Z}\right]$

$$0.073, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

Esercizio 4a. Supponiamo che otto persone su ottanta di una scolaresca copino durante un compito. Supponiamo che il professore, correggendo i compiti, individui segni di copiatura con probabilità 0.6 quando ci sono, e con probabilità 0.05 quando non ci sono (cioè fraintenda qualcosa e pensi che c'è stata copiatura). Un accusato di copiatura, con che probabilità è innocente?

$$0.428, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

Esercizio 4b. Supponiamo che dieci persone su cento di una scolaresca copino durante un compito. Supponiamo che il professore, correggendo i compiti, individui segni di copiatura con probabilità 0.5 quando ci sono, e con probabilità 0.05 quando non ci sono (cioè fraintenda qualcosa e pensi che c'è stata copiatura). Un accusato di copiatura, con che probabilità è innocente?

$$0.474, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

Esercizio 4c. Supponiamo che dieci persone su cento di una scolaresca copino durante un compito. Supponiamo che il professore, correggendo i compiti, individui segni di copiatura con probabilità 0.6 quando ci sono, e con probabilità 0.05 quando non ci sono (cioè fraintenda qualcosa e pensi che c'è stata copiatura). Un accusato di copiatura, con che probabilità è innocente?

$$0.428, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

Esercizio 4d. Supponiamo che otto persone su ottanta di una scolaresca copino durante un compito. Supponiamo che il professore, correggendo i compiti, individui segni di copiatura con probabilità 0.5 quando ci sono, e con probabilità 0.06 quando non ci sono (cioè fraintenda qualcosa e pensi che c'è stata copiatura). Un accusato di copiatura, con che probabilità è innocente?

$$0.568, \quad 0.0, \quad 0.0, \quad 0.0$$

1 Soluzioni

Esercizio 1a. i)

$$P\left(X\in[1,5]\right)=F\left(5\right)-F\left(1\right)=1-e^{-2\cdot 5}-1+e^{-2\cdot 1}=e^{-2\cdot 1}-e^{-2\cdot 5}=0.135.$$

ii)

$$\begin{aligned}P\left(|Y-1|\le 1\right)=P\left(0\le Y\le 2\right)=F\left(2\right)-F\left(0\right)&=\Phi\left(\frac{2-1}{3}\right)-\Phi\left(\frac{0-1}{3}\right)=\Phi\left(0.333\right)-\Phi\left(-0.333\right)\\&=2\cdot\Phi\left(0.333\right)-1=2\cdot 0.6293-1=0.258\,6\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}P\left(ZY\le 2\right)&=P\left(ZY\le 2|Z=0\right)P\left(Z=0\right)+P\left(ZY\le 2|Z=1\right)P\left(Z=1\right)\\&=P\left(0\le 2\right)\cdot 0.8+P\left(Y\le 2\right)\cdot 0.2=0.8+\Phi\left(\frac{2-1}{3}\right)\cdot 0.2\\&=0.8+\Phi\left(0.333\right)\cdot 0.2=0.8+0.6293\cdot 0.2=0.925\,86\end{aligned}$$

Esercizio 1b. i)

$$P\left(X\in[1,5]\right)=F\left(5\right)-F\left(1\right)=1-e^{-6\cdot 5}-1+e^{-6\cdot 1}=e^{-6\cdot 1}-e^{-6\cdot 5}=0.002.$$

ii)

$$\begin{aligned}P\left(|Y-2|\le 2\right)=P\left(0\le Y\le 4\right)=F\left(4\right)-F\left(0\right)&=\Phi\left(\frac{4-2}{3}\right)-\Phi\left(\frac{0-2}{3}\right)=\Phi\left(0.666\right)-\Phi\left(-0.666\right)\\&=2\cdot\Phi\left(0.666\right)-1=2\cdot 0.7454-1=0.490\,8\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}P\left(ZY\le 4\right)&=P\left(ZY\le 4|Z=0\right)P\left(Z=0\right)+P\left(ZY\le 4|Z=1\right)P\left(Z=1\right)\\&=P\left(0\le 4\right)\cdot 0.6+P\left(Y\le 4\right)\cdot 0.4=0.6+\Phi\left(\frac{4-2}{3}\right)\cdot 0.4\\&=0.6+\Phi\left(0.666\right)\cdot 0.4=0.6+0.7454\cdot 0.4=0.898\,16\end{aligned}$$

Esercizio 1c. i)

$$P\left(X\in[2,5]\right)=F\left(5\right)-F\left(2\right)=1-e^{-2\cdot 5}-1+e^{-2\cdot 2}=e^{-2\cdot 2}-e^{-2\cdot 5}=0.018\,.$$

ii)

$$\begin{aligned}P\left(|Y-1|\le 1\right)=P\left(0\le Y\le 2\right)=F\left(2\right)-F\left(0\right)&=\Phi\left(\frac{2-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{0-1}{2}\right)=\Phi\left(0.5\right)-\Phi\left(-0.5\right)\\&=2\cdot\Phi\left(0.5\right)-1=2\cdot 0.691-1=0.382\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}P(ZY\le 2) &= P(ZY\le 2|Z=0)\,P(Z=0)+P(ZY\le 2|Z=1)\,P(Z=1)\\ &= P(0\le 2)\cdot 0.6+P(Y\le 2)\cdot 0.4 = 0.6+\Phi\left(\frac{2-1}{2}\right)\cdot 0.4\\ &= 0.6+\Phi(0.5)\cdot 0.4 = 0.6+0.691\cdot 0.4 = 0.876\,4\end{aligned}$$

Esercizio 1d. i)

$$P(X\in[0,5]) = F(5)-F(0) = 1-e^{-1\cdot 5}-1+e^{-1\cdot 0} = e^{-1\cdot 0}-e^{-1\cdot 5} = 0.993.$$

ii)

$$\begin{aligned}P(|Y-2|\le 2) &= P(0\le Y\le 4) = F(4)-F(0) = \Phi\left(\frac{4-2}{2}\right)-\Phi\left(\frac{0-2}{2}\right) = \Phi(1)-\Phi(-1)\\ &= 2\cdot\Phi(1)-1 = 2\cdot 0.8413-1 = 0.682\,6\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}P(ZY\le 4) &= P(ZY\le 4|Z=0)\,P(Z=0)+P(ZY\le 4|Z=1)\,P(Z=1)\\ &= P(0\le 4)\cdot 0.8+P(Y\le 4)\cdot 0.2 = 0.8+\Phi\left(\frac{4-2}{2}\right)\cdot 0.2\\ &= 0.8+\Phi(1)\cdot 0.2 = 0.8+0.8413\cdot 0.2 = 0.968\,26\end{aligned}$$

Esercizio 2a. i) Con le solite formule di ottiene

$$\overline{x} = 19.5, \qquad s = 3.341656$$

che prendiamo come parametri veri. Cerchiamo λ (= quantità di pane da tenere in negozio) tale che $P(X\le\lambda) = 0.9$. Vale

$$\lambda = 19.5+3.3416\cdot q_{0.9} = 19.5+3.3416\cdot 1.28 = 23.\,777.$$

ii) Siano $X_1,...,X_6$ delle Bernoulli che valgono 1 se manca il pane nel giorno corrispondente, quindi sono delle $B(1,0.1)$. La somma $N = X_1+...+X_6$ è una $B(6,0.1)$ e rappresenta il numero di giorni in cui manca il pane. Dobbiamo calcolare

$$P(N\ge 1) = 1-P(N=0) = 1-\binom{6}{0}0.1^0 0.9^6 = 1-0.9^6 = 0.468\,56.$$

iii) Usando notazioni simili per $X_1,...,X_{100}$, abbiamo

$$\begin{aligned}P(N>15) &= P\left(\frac{N-100\cdot 0.1}{\sqrt{100\cdot 0.1\cdot 0.9}} > \frac{15-100\cdot 0.1}{\sqrt{100\cdot 0.1\cdot 0.9}}\right) \simeq P\left(Z>\frac{15-10}{3}\right) = P(Z>1.\,666\,7)\\ &= 1-\Phi(1.\,6667) = 1-0.9515 = 0.048\,5.\end{aligned}$$

Esercizio 2b. i) Con le solite formule di ottiene

$$\overline{x} = 21.6, \qquad s = 3.306559$$

che prendiamo come parametri veri. Cerchiamo λ (= quantità di pane da tenere in negozio) tale che $P(X \leq \lambda) = 0.9$. Vale

$$\lambda = 21.6 + 3.3065 \cdot q_{0.9} = 21.6 + 3.3065 \cdot 1.28 == 25.832.$$

ii) Siano $X_1, ..., X_5$ delle Bernoulli che valgono 1 se manca il pane nel giorno corrispondente, quindi sono delle $B(1, 0.1)$. La somma $N = X_1 + ... + X_5$ è una $B(5, 0.1)$ e rappresenta il numero di giorni in cui manca il pane. Dobbiamo calcolare

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.1^0 0.9^5 = 1 - 0.9^5 = 0.409\,51.$$

iii) Usando notazioni simili per $X_1, ..., X_{100}$, abbiamo

$$P(N < 15) = P\left(\frac{N - 100 \cdot 0.1}{\sqrt{100 \cdot 0.1 \cdot 0.9}} < \frac{15 - 100 \cdot 0.1}{\sqrt{100 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right) \simeq P\left(Z < \frac{15 - 10}{3}\right) = P(Z < 1.666\,7)$$
$$= \Phi(1.6667) = 0.9515.$$

Esercizio 2c. i) Con le solite formule di ottiene

$$\overline{x} = 17.6, \qquad s = 3.272783$$

che prendiamo come parametri veri. Cerchiamo λ (= quantità di pane da tenere in negozio) tale che $P(X \leq \lambda) = 0.8$. Vale

$$\lambda = 17.6 + 3.2728 \cdot q_{0.8} = 17.6 + 3.2728 \cdot 0.84 = 20.349.$$

ii) Siano $X_1, ..., X_6$ delle Bernoulli che valgono 1 se manca il pane nel giorno corrispondente, quindi sono delle $B(1, 0.2)$. La somma $N = X_1 + ... + X_6$ è una $B(6, 0.2)$ e rappresenta il numero di giorni in cui manca il pane. Dobbiamo calcolare

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - \binom{6}{0} 0.2^0 0.8^6 = 1 - 0.8^6 = 0.737\,86.$$

iii) Usando notazioni simili per $X_1, ..., X_{100}$, abbiamo

$$P(N < 15) = P\left(\frac{N - 100 \cdot 0.2}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} < \frac{15 - 100 \cdot 0.2}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) \simeq P\left(Z < \frac{15 - 20}{4}\right) = P(Z < -1.25)$$
$$= 1 - \Phi(1.25) = 0.1056.$$

Esercizio 2d. i) Con le solite formule di ottiene

$$\overline{x} = 21.3, \qquad s = 3.973523$$

che prendiamo come parametri veri. Cerchiamo λ (= quantità di pane da tenere in negozio) tale che $P(X \leq \lambda) = 0.8$. Vale

$$\lambda = 21.3 + 3.9735 \cdot q_{0.8} = 21.3 + 3.9735 \cdot 0.84 == 24.638.$$

ii) Siano $X_1, ..., X_5$ delle Bernoulli che valgono 1 se manca il pane nel giorno corrispondente, quindi sono delle $B(1, 0.2)$. La somma $N = X_1 + ... + X_5$ è una $B(5, 0.2)$ e rappresenta il numero di giorni in cui manca il pane. Dobbiamo calcolare

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.2^0 0.8^5 = 1 - 0.8^5 = 0.672\,32.$$

iii) Usando notazioni simili per $X_1, ..., X_{100}$, abbiamo

$$P(N > 15) = P\left(\frac{N - 100 \cdot 0.2}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} > \frac{15 - 100 \cdot 0.2}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right) \simeq P\left(Z > \frac{15 - 20}{4}\right) = P(Z > -1.25)$$
$$= \Phi(1.25) = 0.8943.$$

Esercizio 3a. i) Per l'indipendenza,

$$E\left[X^2 e^{Y+3Z}\right] = E\left[X^2\right] E\left[e^Y\right] E\left[e^{3Z}\right] = \left(\sigma_X^2 + \mu_X^2\right) \phi_Y(1) \phi_Z(3) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) e^{1 \cdot 1 + \frac{9 \cdot 1}{2}} \left(0.2 \cdot e^3 + 0.8\right) = 589.3$$

ii) La v.a. $Z^2 e^{Z^2}$ assume il valore $1^2 e^{1^2} = e$ con probabilità 0.2, $0^2 e^{0^2} = 0$ con probabilità 0.8, quindi

$$E\left[Z^2 e^{Z^2}\right] = e \cdot 0.2 = 0.543\,66.$$

Esercizio 3b. i) Per l'indipendenza,

$$E\left[e^{Y/2+Z} X^2\right] = E\left[X^2\right] E\left[e^{Y/2}\right] E\left[e^Z\right] = \left(\sigma_X^2 + \mu_X^2\right) \phi_Y\left(\frac{1}{2}\right) \phi_Z(1) = \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36}\right) e^{2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{9 \cdot \frac{1}{4}}{2}} \left(0.4 \cdot e^1 + 0.6\right) =$$

ii) La v.a. $Z^2 e^Z$ assume il valore $1^2 e^1 = e$ con probabilità 0.4, $0^2 e^0 = 0$ con probabilità 0.6, quindi

$$E\left[Z^2 e^Z\right] = e \cdot 0.4 = 1.087\,3.$$

Esercizio 3c. i) Per l'indipendenza,

$$E\left[X^2 e^{2Y+Z}\right] = E\left[X^2\right] E\left[e^{2Y}\right] E\left[e^Z\right] = \left(\sigma_X^2 + \mu_X^2\right) \phi_Y(2) \phi_Z(1) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) e^{1 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 4}{2}} \left(0.4 \cdot e^1 + 0.6\right) = 18583$$

ii) La v.a. Ze^{-Z^2} assume il valore $1e^{-1^2} = e^{-1}$ con probabilità 0.4, $0e^{-0^2} = 0$ con probabilità 0.6, quindi

$$E\left[Ze^{-Z^2}\right] = e^{-1} \cdot 0.4 = 0.147\,15$$

Esercizio 3d. i) Per l'indipendenza,

$$E\left[e^{Y-Z}X^2\right] = E\left[X^2\right]E\left[e^Y\right]E\left[e^{-Z}\right] = \left(\sigma_X^2+\mu_X^2\right)\phi_Y(1)\,\phi_Z(-1) = \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)e^{2\cdot 1+\frac{4\cdot 1}{2}}\left(0.2\cdot e^{-1}+0.8\right) = 95$$

ii) La v.a. Ze^{-Z} assume il valore $1e^{-1}=e^{-1}$ con probabilità 0.2, $0e^{-0}=0$ con probabilità 0.8, quindi

$$E\left[Ze^{-Z}\right] = e^{-1}\cdot 0.2 = 0.0735.$$

Esercizio 4a. $P(C)=0.1,\ P(A|C)=0.6,\ P(A|nC)=0.05,$

$$P(A) = P(A|C)\,P(C)+P(A|nC)\,P(nC) = 0.6\cdot 0.1+0.05\cdot 0.9 = 0.105$$

$$P(nC|A) = \frac{P(A|nC)\,P(nC)}{P(A)} = \frac{0.05\cdot 0.9}{0.105} = 0.428\,57.$$

Esercizio 4b. $P(C)=0.1,\ P(A|C)=0.5,\ P(A|nC)=0.05,$

$$P(A) = P(A|C)\,P(C)+P(A|nC)\,P(nC) = 0.5\cdot 0.1+0.05\cdot 0.9 = 0.095$$

$$P(nC|A) = \frac{P(A|nC)\,P(nC)}{P(A)} = \frac{0.05\cdot 0.9}{0.095} = 0.473\,68.$$

Esercizio 4c. $P(C)=0.1,\ P(A|C)=0.6,\ P(A|nC)=0.05,$

$$P(A) = P(A|C)\,P(C)+P(A|nC)\,P(nC) = 0.6\cdot 0.1+0.05\cdot 0.9 = 0.105$$

$$P(nC|A) = \frac{P(A|nC)\,P(nC)}{P(A)} = \frac{0.05\cdot 0.9}{0.105} = 0.428\,57.$$

Esercizio 4d. $P(C)=0.1,\ P(A|C)=0.5,\ P(A|nC)=0.06,$

$$P(A) = P(A|C)\,P(C)+P(A|nC)\,P(nC) = 0.5\cdot 0.1+0.06\cdot 0.9 = 0.104$$

$$P(nC|A) = \frac{P(A|nC)\,P(nC)}{P(A)} = \frac{0.06\cdot 0.9}{0.104} = 0.519\,23$$