Registro del corso di Probabilità
a.a. 2018-19

Lezione 1 (25/9). Definizione di algebra, di σ-algebra, di σ-algebra $\sigma(\mathcal{I})$ generata da una famiglia $\mathcal{I}$ di insiemi; la famiglia $\mathcal{B}$ delle unioni numerabili di elementi di $\mathcal{I}$ non è necessariamente una σ-algebra, gap col concetto astratto $\sigma(\mathcal{I})$. Esempio della famiglia $\mathcal{I}$ degli intervalli chiusi e limitati, $\mathcal{B}$ contiene i razionali, ma non gli irrazionali.

Chiusura di una famiglia per unione numerabili di insiemi arbitrari, piuttosto che disgiunti piuttosto che crescenti sono tre proprietà equivalenti per algebre (*), non in generale. Enunciato del teorema delle classi monotone (**).

Misure di probabilità finitamente additive e σ-additive. Enunciato del teorema di prolungamento; considerazione intuitiva sulla sua non ovvietà alla luce del divario tra $\mathcal{B}$ e $\sigma(\mathcal{A}_0)$ (dove $\mathcal{A}_0$ è l'algebra di partenza). Definita $\mathcal{B}$ tramite unioni crescenti, enunciato il Lemma 1.1.5 (***) basato sull'ipotesi di σ-additività su $\mathcal{A}_0$, si estende facilmente P a $\mathcal{B}$; ma questo non spiega l'estenzione a $\sigma(\mathcal{A}_0)$.

Lezione 2 (26/9). Dimostrazione di (*), inizio di (**) basato su (*), dimostrazione di (***). In analogia con (*), viene ricordato che, modulo l'additività, la σ-additività equivale alla continuità per successioni crescenti di insiemi e per successioni decrescenti, anche solo al vuoto (nota facoltativa sulla variante se la massa è infinita).

Alla teoria viene affiancato l'esempio concreto di una misura definita da densità continua a tratti (quindi le integrazioni sono elementari, alla Riemann) sull'algebra $\mathcal{A}_0$ generata dalla famiglia $\mathcal{I}$ degli intervalli chiusi (anche illimitati); tale misura, chiaramente additiva su $\mathcal{A}_0$, è anche σ-additiva su $\mathcal{A}_0$ grazie alla dimostrazione del Teorema 3.1.7 del corso di Elementi di Probabilità. Questo ne permette l'estensione a $\mathcal{B}$, per ora.

Enunciato della σ-additività dell'estensione di P a $\mathcal{B}$ (Lemma 1.1.6). Quindi P su $\mathcal{B}$ ha le stesse proprietà che su $\mathcal{A}_0$: il vantaggio è che $\mathcal{B}$ è chiusa per unioni crescenti. Ma non è necessariamente una σ-algebra (vedi lezione precedente).

Come andare oltre: misura esterna P^* ed insiemi di Carathéodory (definizioni). Esempio di non additività della misura esterna se costruita a partire da $\mathcal{A}_0$ invece che da $\mathcal{B}$ (razionali e irrazionali). (Enunciato della proposizione 1.17:) Buona da vari punti di vista legati alla monotonia; in più è continua per successioni crescenti di insiemi, come su $\mathcal{B}$: si sottolinea l'importanza del passo costruttivo intermedio $\mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}$ per avere tale proprietà (le altre, di monotonia, le avrebbe avute anche partendo da $\mathcal{A}_0$). Senza esemplificare, viene tuttavia segnalato che manca però l'additività su insiemi qualsiasi (gli esempi qui sono più difficili; prima abbiamo osservato solamente che il passaggio $\mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}$ evita che l'additività sia già stata persa in esempi banali come razionali e irrazionali). La definizione di insiemi di Carathéodory la impone, per così dire. Enunciato del Teorema 1.1.8, sui fatti finali riguardanto la misura esterna su tali insiemi; sottolineando il ruolo della continuità sotto insiemi crescenti della misura esterna.

Lezione 3 (28/9). Completamento dimostrazione di (**); variante dell'enunciato del teorema senza l'ipotesi che $\mathcal{M}$ sia minimale (conclusione: $\mathcal{M}$ contiene $\sigma(\mathcal{I})$). Come corollario, dimostrazione del teorema di unicità dell'estensione della misura. Questo conclude l'esposizione del paragrafo 1.1, avendo saltato un certo numero di verifiche nella dimostrazione del teorema di estensione, e saltato il Corollario 1.1.3.

Integrazione delle v.a. reali (sezione 1.2): panoramica della teoria, illustrando le varie definizioni, i lemmi che sostengono la definizione di integrale di una funzione positiva (inclusa l'approssimabilità con funzioni semplici, anche uniforme per funzioni limitate), enunciando i teoremi limite fondamentali e la disuguaglianza di Jensen. Non vengono eseguite esplicitamente le dimostrazioni.

Lezione 4 (2/10, Dario Trevisan). 1.5.1 Nozioni di spazi di Hilbert: definizione; sistemi ortonormali massimali/completi, disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval (senza dimostrazione); convessi chiusi e teorema di proiezione sui convessi (enunciato, cenni della dimostrazione); teorema di rappresentazione di Riesz (dimostrazione usando il teorema di proiezione sui convessi); lo spazio L^2 è di Hilbert (solo enunciato). 1.3 Misure definite da densità, definizione e prime proprietà. Assoluta continuità ed equivalenza tra misure, definizione e prime proprietà. Ogni misura sigma-finita (non-nulla) è equivalente ad una probabilità (con dimostrazione).

Lezione 5 (3/10, D.T.). Unicità essenziale della densità (quando esiste) e scrittura "differenziale" (con relative regole di calcolo). Teorema di Radon-Nikodym con dimostrazione. Come cambia la dimostrazione se non si assume l'assoluta continuità? Misure singolari. Decomposizione di Lebesgue (enunciato e dimostrazione). Atomi di una misura e dimostrazione della numerabilità (caso σ-finito). Misura diffusa. Decomposizione di Lebesgue di una misura sulla retta nelle parti assolutamente continua, atomica e cantoriana. Proposizione 1.3.6 (versione "quantitativa" della assoluta continuità).

Lezione 6 (10/10). Richiamo su indipendenza di due eventi e di due variabili aleatorie. Definizione di indipendenza di una famiglia finita di σ-algebre e di una famiglia finita di variabili aleatorie; conservazione dell'indipendenza sotto trasforazioni. Definizione di indipendenza di una famiglia infinita di variabili aleatorie.

Spazio prodotto arbitrario, definizione di σ-algebra prodotto, partendo da rettangoli cilindrici oppure insiemi cilindrici generali. Misurabilità di un blocco arbitrario di variabili aleatorie, visto come v.a. a valori nello spazio prodotto; sua misura immagine. Definizione di misura prodotto.

Teorema: data una famiglia arbitraria di v.a. indipendenti, la legge del blocco è una misura prodotto. Teorema: dato uno spazio prodotto con una misura prodotto, le proiezioni sono una famiglia di v.a. indipendenti. Nel seguito del corso costruiremo entrambi gli oggetti.

Lezione 7 (16/10, D.T.). Cenni al atteso di variabili vettoriali e complesse. Definizione della funzione caratteristica, proprietà elementari e confronto con la trasformata di fourier. Derivata della funzione caratteristica e momenti della variabile aleatoria (teoremi 3.1.3, 3.1.4). Sviluppo di Taylor della funzione caratteristica, criterio per l'analiticità (Corollario 3.1.5) e applicazione al problema dei momenti (Corollario 3.1.6). Esempi di funzioni caratteristiche: legge uniforme su un intervallo (caso discreto e caso continuo), binomiale, Poisson, geometrica, esponenziale. (Gamma lasciata per esercizio).

Lezione 8 (17/10, D.T.). Calcolo della funzione caratteristica della legge gaussiana (e osservazione che la trasformata di fourier della funzione caratteristica è la densità iniziale, a meno di fattore 2 pi greca). Vettori aleatori gaussiani: definizione, proprietà della matrice di covarianza, trasformazione affine di vettori aleatori gaussiani è gaussiana. Osservazioni (usando l'iniettività della funzione caratteristica dimostrata dopo): i parametri (m, Q) identificano univocamente la legge gaussiana; se due componenti di un vettore gaussiano sono non correlate allora sono indipendenti. Costruzione di vettori aleatori gaussiani con data media e covarianza (Teorema 3.4.7). Densità nel caso non degenere (Q invertibile). Proprietà di isometria in L^2, a meno di un fattore 2 pi greca, della funzione caratteristica (dimostrazione usando vettori gaussiani). Corollario 3.2.3: formula di inversione nel caso in cui la funzione caratteristica sia integrabile. Iniettività della funzione caratteristica (Teorema 3.2.2).

Lezione 9 (19/10). Teorema di rappresentazione di Doob. Eventi coda, esempi, Legge zero-uno di Kolmogorov. Osservazione su rilevanza dell'ipotesi di indipendenza: trovare esempi con eventi coda di probabilità 1/2. Evento limite superiore. Lemma di Borel-Cantelli, parte prima e seconda.

Lezione 10 (23/10). Definizioni di convergenza in L^p, in probabilità, quasi certa e in legge. Dimostrazione le convergenze in L^p e q.c. implicano quella in probabilità: esempi del fatto che non valgono i viceversa. Legami tra convergenza in probabilità e q.c. per sottosuccessioni, con dimostrazioni; da una delle dmostrazioni, basata sul lemma di Borel-Cantelli I, abbiamo estratto un criterio di convergenza q.c. basato su una versione quantitativa della convergenza in probabilità, espressa o con la sommabilità di certe probabilità, oppure di certi valori attesi (che implica la precedente attraverso Chebyshev). Teorema di convergenza dominata con ipotesi di convergenza in probabilità. Conseguenza: la convergenza in probabilità (e quindi anche in L^p e q.c.) implica la convergenza in legge.

Lezione 11 (24/10, D.T.). (1 ora esercitazione) Se due variabili aleatorie (vettoriali o più in generale uno spazio metrico) danno lo stesso integrale per tutte le funzioni continue e limitate, allora hanno la stessa legge. Densità della somma di due variabili aleatorie vettoriali di cui una assolutamente continua: formula di convoluzione e proprietà di regolarizzazione (limitatezza, continuità...). (1 ora lezione) Formula di inversione della funzione caratteristica di variabili reali: enunciato e cenni (non rigorosi) alla dimostrazione. Funzione generatrice dei momenti: definizione, legame con la funzione caratteristica, dominio e applicazione al problema dei momenti. Enunciato del teorema di Paul Levy sulla convergenza in legge di variabili aleatorie: esempio in cui lacondizione di continuità in 0 del limite non è verificata, esempio di applicazione alla convergenza di Binomiali verso Poisson. Enunciato del Teorema del Limite Centrale (caso reale e caso vettoriale).

Lezione 12 (30/10). Convergenza di Cauchy in probabilità, teorema di completezza. Enunciati strutturali su spazi di classi di equivalenza di v.a. ed opportune metriche (L^p ed L^0).

Definizioni di convergenza debole, vaga e stretta. Esempi vari, sia con misure tipo delta di Dirac sia con misure gaussiane, che mostrano la non equivalenza e le patologie presenti nella convergenza debole. Enunciato del teorema di equivalenza sotto ulteriori ipotesi.

Lezione 13 (31/10). Dimostrazione del teorema di equivalenza sotto ulteriori ipotesi. Condizione di famiglia tesa e corrispondenza intuitiva con le condizioni precedenti che evitano la dispersione di massa all'infinito; enunciato del Teorema di Prohorov.

Enunciato del teorema sulle caratterizzazioni tramite convergenze di funzioni di ripartizione.

Teorema di Helly.

Lezione 14 (6/11, D.T.). Dimostrazione del teorema del limite centrale di Paul Lévy. Estensione al caso vettoriale (verifica della convergenza dei prodotti scalari con vettori fissati), al caso non identicamente distribuito (dimostrazione nel caso di momento terzo equilimitato, solo enunciato del teorema di Lindberg con verifica che implica il caso del momento terzo). Versioni quantitative del TLC: definizione di distanza in variazione totale, di Kolmogorov (sup dellal differenza funzioni di ripartizione) e di Kantorovich (suo differenza valori attesi composizione variabili con funzioni 1-Lip), enunciato del teorema di Berry-Esseen. Esercizi: formula di integrazione per parti gaussiana, calcolo dei momenti della gaussiana standard.

Lezione 15 (7/11). Dimostrazione del teorema sulle caratterizzazioni tramite convergenze di funzioni di ripartizione; formulazione, secondo la Proposizione 4.2.4, tramite due affermazioni separate, una di carattere più generale. Discussione critica della difficoltà, anche in relazione ad un potenziale concetto di convergenza di $\int \varphi d\mu_n$ quando φ non è continua. Enunciato del teorema 4.2.8.

Dimostrazione del Teorema di Prohorov: freccia che porta da famiglia tesa a relativa compattezza per successioni.

Lezione 16 (9/11). Dimostrazione del Teorema di Prohorov: seconda freccia.

Commenti su come pezzi della dimostrazione del Teorema di Prohorov possono essere usati per fare una dimostrazione alternativa del teorema di equivalenza tra convergenza stretta e debole quando le masse totali convengono.

Convergenza in legge di v.a., trascrizione dei risultati sulla convergenza stretta di misure, nuovi fatti ed esempi.

Teorema di P. Lévy, con dimostrazione completa delle parti concettuali, semi-grafica delle parti quantitive sulla tightness della famiglia. In rete si trova la formalizzazione, facoltativa per l'esame, delle idee esposte a lezione; naturalmente va anche bene studiare la dimostrazione delle dispense.

Lezione 17 (13/11). Teorema sulla convergenza in legge di gaussiane.

Teorema di rappresentazione di Skorohod.

Come applicazione: convergenza di $\int \varphi d\mu_n$ quando l'insieme dei punti di non continuità di φ ha misura nulla rispetto alla misura limite.

Legge dei gradi numeri: richiamo sul teorema del corso precedente (caso di variabili a due a due scorrelate).

Lezione 18 (14/11). Legge dei gradi numeri: definizioni. Osservazioni intuitive sulla non ovvietà della LGN, sulle cancellazioni "precise" prodotte dall'indipendenza (esempio delle v.a. i.i.d. $X_i = +1$ con probabilità p, $X_i = -1$ con probabilità $1-p$). Esercizio con Borel-Cantelli II che mostra che in quasi ogni sequenza ci sono sequenze finite prestabilite, es. "isole" arbitrariamente lunghe di $+1$ in una successione di Bernoulli (vedere anche note allegate al corso).

Scopo del capitolo 5: mostrare come si può passare dalla converenza in probabilità a quella quasi certa. Primo metodo: Borel-Cantelli (di cui si rammenta il criterio basato sull'informazione quantitativa sui momenti). Teorema: $\{X_i\}$ i.i.d. con momento quarto finito, implica LFGN. La dimostrazione si trova sulle note allegate al corso.

Teoria di Kolmogorov, orientata a indebolire l'ipotesi di sommabilità, per successioni $\{X_i\}$ i.i.d. Enunciato della disuguaglianza massimale; paragone con disuguaglianza di Chebyshev.

Lezione 19 (16/11). Disuguaglianza massimale (solo prima freccia, con dimostrazione). Criterio di convergenza di serie aleatorie (solo prima freccia, con dimostrazione). Lemma di Kronecker e sua conseguenza: LFGN in ipotesi basate sui momenti secondi. Confronto tra i diversi enunciati di LFGN.

Lezione 20 (20/11). Lemma tecnico e LFGN di Kolmogorov.

Prime definizioni sui processi stocastici.

Lezione 21 (21/11, D.T.). Speranza condizionale: definizione e dimostrazione dell'esistenza (Prop 6.1.1, usando il teorema di Radon-Nikodym). Caratterizzazione (nel caso di variabili di quadrato integrabile) come proiezione ortogonale sul sottospazio delle variabili misurabili rispetto alla sotto sigma-algebra (Prop 6.1.7). Calcolo esplicito nel caso di sotto sigma-algebre generate da una partizione numerabile (oppure variabili aleatorie discrete, Esempi 6.2.1, 6.2.4). Proprietà generali della speranza condizionale (Prop. 6.1.2), disuguaglianza di Jensen condizionale (Prop 6.1.3) e applicazione alle norme L^p (Corollario 6.1.4).

Lezione 22 (27/11, D.T.). Elementi vari del capitolo 6.

Lezione 23 (28/11). Definizione di moto browniano, illustrazione grafica preliminare, cenno grafico all'approssimazione tramite random walk, motivazioni fisiche, intepretazione grafica delle proprietà. Costruzione del moto browniano grossolano: definizione di B_t.

Lezione 24 (30/11, D.T.). Unione essenziale: definizione, unicità e risultato di esistenza (6.3.2). Esempio 6.3.3. Estremo superiore essenziale di una famiglia di variabili aleatorie (definizione). Teorema di Halmos-Savage e applicazione alla statistica parametrica. Teorema 6.3.7 (solo enunciato).

Lezione 25 (4/12). Completamento della costruzione del moto browniano grossolano. Definizioni di processi indistinguibili e versioni, legami facili. Enunciato del lemma di regolarità di Kolmogorov e sua applicazione alla regolarità del moto browniano. Lemma sul fatto che due versioni continue sono indistinguibili; suo uso per completare la dimostrazione del fatto precedente.

Lezione 26 (5/12). Teorema sulla variazione quadratica (sia convergenza in L^2 e probabilità per partizioni infinitesime qualsiasi, sia convergenza quasi certa per partizioni più veloci) e sua conseguenza sull'irregolarità delle traiettore browniane.

Processo di Poisson: definizione, illustrazione grafica, cenno alla costruzione, dimostrando che N_t è Poisson (omessi i calcoli sulle densità Gamma); dalla construzione, assenza di accumulo dei salti.

Il Lemma sull'hölderianità di funzioni definite sui diadici e la conseguente dimostrazione del lemma di regolarità di Kolmogorov non sono in programma. Che un processo, indicizzato ad es. da $[0, T]$, definisce una legge sullo spazio $R^{[0,T]}$, munito della σ-algebra prodotto, è elementare; viene omessa la verifica che un processo a traiettorie continue definisce una legge sullo spazio delle funzioni continue, munito della σ-algebra dei boreliani.