PROBABILITA'
Laurea in Matematica
a.a. 2017/18
Registro delle lezioni

25/09/2017. Teorema delle classi monotone, con dimostrazione.

Corollario di unicità di misure coincidenti su classi chiuse per intersezione (possibilmente con dimostrazione).

27/09/2017. Teorema di prolungamento. Idee sull'approssimazione da fuori e da dentro, cone esempio guida della misura associata ad una densità (patologie relative agli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Dimostrazione dei lemmi 1.1.5, 1.1.6; $\mathcal{B}$ non è una σ-algebra. Definizione di P^* su tutto $\mathcal{P}(\Omega)$, enunciato della Proposizione 1.1.7, restrizione di P^* a $\mathcal{C}$, enunciato del Teorema 1.1.8, illustrazione dello schema

$$(\mathcal{A}, P) \to (\mathcal{B}, P) \to (\mathcal{P}(\Omega), P^*) \to (\mathcal{C}, P^*)$$

e dell'importanza del passo intermedio di $\mathcal{B}$.

28/09/2017. Completamento della dimostrazione del Teorema di prolungamento. Il paragrafo 1,1 è stato svolto interamente.

Presentazione di alcuni elementi sparsi del corso, come prospettiva: richiamo sulla legge dei grandi numeri in forma debole, e dei concetti di convergenza in L^p ed in probabilità; definizione di convergenza quasi certa; necessità, a differenza degli altri, di avere uno spazio di probabilità su cui è definita l'intera successione di variabili aleatorie; enunciato dei legami principali tra le diverse convergenze. Questi elementi si trovano all'inizio del paragrafo 4.1.

2/10/2017. Lemma di Borel-Cantelli, parte 1 (paragrafo 2.4), e condizioni sufficienti per la convergenza quasi certa. Esempi: una legge forte dei grandi numeri, sotto ipotesi di momento quarto finito; maggiorazione dall'alto di una successione di v.a. i.i.d.; questi esempi si trovano nelle note allegate al materiale didattico.

4/10/2017. Integrale di funzioni semplici, lemma di Beppo-Levi per esse, lemma successivo che serve per rendere buona la definizione di integrale (per v.a. positive). Generalizzazione al caso in cui la v.a. X che vogliamo integrare può assumere il valore $+\infty$. Lemma di Beppo-Levi nel caso generale. Generalizzazione del concetto di integrale (o valore atteso) a v.a. qualsiasi (salvo il caso di forme indeterminate). Approssimazione uniforme dal basso di v.a. positive limitate. Il resto del paragrafo 1.2 viene lasciato alla lettura individuale (anche senza dimostrazioni), sottolineando l'importanza dei vari enunciati, ad esempio del teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

5/10/2017. Misure σ-finite, densità, misure definite da densità, misure equivalenti, esempi. Formula di integrazione rispetto ad una misura definita da una densità, richiamo alla formula di integrazione rispetto alla legge di una v.a., cenno alle dimostrazioni. Assoluta continuità di misure ed enunciato del Teorema di Radon-Nikodym. Premesse sugli spazi di Hilbert, esempio di $L^2(E, \mu)$, prodotto scalare e norma di questo spazio; funzionali lineari continui ed enunciato del Teorema di Riesz, esempio di $F(\varphi) = \int \varphi d\mu$ sullo spazio $L^2(E, \mu + \nu)$.

Schema di dimostrazione del teorema, con riduzione a misure finite ed applicazione dell'esempio (anche illustrazione di una potenziale dimostrazione più semplice che però non funziona). Restano da dimostrare alcuni passi.

9/10/2017. Vari esercizi semplici di verifica sul concetto di misurabilità, teorema di misurabilità di Doob con dimostrazione. Definizione di sigma algebra prodotto, sua riformulazione tramite rettangoli cilindrici e insiemi cilindrici.

Completamento della dimostrazione del Teorema di Radon-Nikodym. Sottolineatura sul ruolo sottile dell'ipotesi. Notazioni per la derivata di Radon-Nikodym, euristica del rapporto incrementale, equivalenza di misure e formula prodotto.

11/10/2017. Misura portata da un insieme, definizione di misure singolari, esempi. Teorema di decomposizione di Lebesgue, solo enunciato.

Richiamo su come costruire una v.a. con legge data ed una successione finita di v.a. indipendenti con leggi date (dando per ora per buono il teorema di esistenza della misura prodotto). Approfondimenti sulla definizione di famiglia finita di σ-algebre indipendenti e di famiglia finita di v.a. indipendenti. Definizione di famiglia di v.a. indipendenti di cardinalità qualsiasi.

Inizio della costruzione della misura prodotto con una quantità numerabile di fattori. Verifica del fatto che, data l'esistenza di tale misura prodotto, esiste una successione di v.a. indipendenti con leggi assegnate.

12/10/2017. Vari esercizi sul teorema delle classi monotone: Corollario 1.1.3, Proposizione 2.2.5, Proposizione 2.3.1 (anche la parte non basata sulle classi monotone). Teorema di Fubini-Tonelli.

Completamento della dimostrazione della costruzione della misura prodotto con una quantità numerabile di fattori.

Lemma di Borel-Cantelli II parte, con dimostrazione ed esempio di ricorrenza.

16/10/2017. Definizione di funzione caratteristica, prime proprietà, teoremi sulla derivabilità in relazione ai momenti, sviluppo di Taylor e sue prime conseguenze.

18/10/2017. Teorema di inversione per le funzioni caratteristiche. Suoi corollari.

19/10/2017. Completamento di una misura: il problema degli insiemi trascurabili, definizione di F^P, enunciato del teorema (caratterizzazione degli insiemi di F^P, definizione e proprietà di P su F^P, F^P contiene is sottoinsiemi degli insiemi di misura nulla). Per esercizio: verificare che la famiglia $G = \{A \subset \Omega : \exists B, C \in F, B \subset A \subset C, P(B) = P(C)\}$ è chiusa per unione numerabile.

Definizione di eventi terminali, esempio di $\Omega = \{-1, 1\}^N$, $X_n = \pi_n$, $S_n = X_1 + ... + X_n$, $A_\alpha = \left\{\exists \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \text{ e vale } \alpha\right\}$, con $\alpha \in [-1, 1]$. Gli insiemi A_α sono terminali. Si provi a mostrare che non sono vuoti, esibendo esempi di loro elementi. Problema delle cancellazioni. Dato un qualsiasi $p \in [0, 1]$, detta μ_p la legge su $\{-1, 1\}$ tale che $\mu_p(1) = p$, detto P_p il prodotto cartesiano di μ_p sulla sigma algebra degli insiemi cilindrici di Ω, mostrare che $P_p(A_\alpha) = 1$ se $\alpha = 2p - 1$, zero altrimenti. La probabilità prodotto è in grado di individuare infinite sequenze appartenenti a ciascun A_α.

Enunciato e dimostrazione della legge 0-1 di Kolmogorov.

Vettori aleatori: definizione di media m e matrice di covarianza Q, loro trasformazioni sotto trasformazioni affini dei vettori (in particolare $Q_Y = AQ_XA^T$ se $Y = AX + b$). Definizione di vettore gaussiano, stabilità della gaussianità sotto trasformazioni lineari; teorema sul fatto che la legge di un vettore gaussiano è caratterizzata da m e Q.

Lo studio dei capitoli 1, 2 e 3 è terminato (salvo dettagli sui vettori gaussiani).

23/10/2017. Capitolo 4, sezione 4.1: convergenze di successioni di v.a.: definizioni, legami. Sono state dimostrate tutte le affermazioni principali del paragrafo 4.1, salvo la completezza degli spazi L^p ed L^0.

Esercizi per casa. Si suggerisce di dimostrare, a titolo di esercizio, le quattro affermazioni puntate di pagina 57. Inoltre, si suggeriscono i seguenti tre esercizi sugli argomenti della sezione 2.4.

Esercizio 1. Costruire una successione di v.a. un cui evento terminale abbia probabilità 1/2.

Esercizio 2. Costruire un esempio di successione di v.a. indipendenti (X_n) ed un evento terminale basato sulla v.a. $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ che abbia probabilità 1. Se l'esempio fatto è troppo banale, si rifletta sul problema più in generale.

Esercizio 3. Sia (X_n) una successione di v.a. $N(0,1)$ indipendenti. Mostrare che $\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty$, $\liminf_{n\to\infty} X_n = -\infty$. Trovare delle classi di successioni divergenti (α_n) di numeri reali positivi tali per cui $\lim_{n\to\infty} |X_n| / \alpha_n = 0$. Si immagini pertanto, graficamente, come potrebbe apparire una realizzazione di (X_n) (ovvero la successione $(X_n(\omega))$ per un generico ω).

30/10/2017. Capitolo 4: definizioni di convergenza stretta, debole e vaga, esempio delle δ_{x_n}, Proposizione 4.2.2 di equivalenza con dimostrazione, solo enunciato della Proposizione 4.2.3, definizione di famiglia tesa e suo potenziale ruolo nella dimostrazione della Proposizione 4.2.2, Proposizione 4.2.4 sulle funzioni di ripartizione (per ora dimostrazione della prima parte), esempio sul ruolo dell'ipotesi di continuità della funzione limite.

2/11/2017. Capitolo 4: esempi di successioni di delta di Dirac, per vedere varie possibilità. Completamento dimostrazione della Proposizione 4.2.4. Teorema di Helly. Famiglie tese e teorema di Prohorov.

6/11/2017. Capitolo 4: convergenza in legge di successioni di v.a. e convergenze di misure; considerazioni generali. Teorema di Paul Lévy: dimostrato esclusa la tightness. Teorema Limite Centrale: inizio della dimostrazione.

8/11/2017. Completamento delle dimostrazione del Teorema Limite Centrale e cenno ad una sua generalizzazione a variabili non equidistribuite. Inizio della presentazione del moto browniano.

9/11/2017. Definizione di processo stocastico e delle sue traiettorie. Definizione di moto browniano. Immaginazione, sulla base degli assiomi, del comportamento delle sue traiettorie. Passeggiata aleatoria, cenno al suo riscalamento che converge al moto browniano (convergenza in legge della marginale al tempo $t = 1$, sulla base del Teorema

Limite Centrale).

Cenno alla dimostrazione della tightness nel teorema di Paul Lévy.

15/11/2017. Conclusione del paragrafo del Capitolo 3 sui vettori gaussiani (scorrelate, componenti di un vettore gaussiano implica indipendenti; dati m e Q con opportune proprietà c'è un vettore gaussiano con tali parametri; densità se Q è invertibile).

Sui legami tra diverse convergenze: proposizione 4.3.2; Teorema di rappresentazione di Skorohod. Della sua dimostrazione per ora abbiamo richiamato l'uso della pseudo-inversa per costruire v.a. con leggi date, illustrando i tre casi base; ed impostato la dimostrazione, salvo la verifica che $G_{X_n} \to G_X$, Lebesgue q.c.

16/11/2017. Completamento della dimostrazione del Teorema di rappresentazione di Skorohod (è sufficiente capire i dettagli della dimostrazione nel caso di funzioni di ripartizione continue strettamente crescenti). Convergenza in legge di v.a. gaussiane (solo cenno di dimostrazione). Estensione della convergenza in legge a funzioni test non continue su un insieme di misura nulla per la legge limite. Il capitolo 4 è concluso.

Definizione di moto browniano grossolano e non. Cenno al concetto di white noise, la derivata del moto browniano (formalizzabile con la teoria delle distribuzioni, per noi vista a livello intuitivo), "processo stocastico" fatto di "variabili aleatorie" indipendenti, gaussiane centrate (ma varianza infinita). Scrivendo la sua serie di Fourier, i coefficienti sono v.a. $N(0,1)$ indipendenti (tutti questi fatti non sono stati né formalizzati né tanto meno dimostrati; si possono vagamente intuire sostituendo la detivata col rapporto incrementale, con incremento molto piccolo). Questo fatto fornisce lo spunto per *construire* il moto browniano con le serie di Fourier.

20/11/2017. Esistenza di un moto browniano grossolano. Proprietà di variazione quadratica (per ora solo enunciato).

27/11/2017. Proprietà di variazione quadratica (dimostrazione della convergenza in media quadratica, e quindi probabilità, sotto ipotesi generali per la partizione; poi deduzione della convergenza quasi certa col criterio basato su Borel Cantelli, nel caso di partizioni con $\sum |\pi_n| / \epsilon_n < \infty$).

Proposizione che afferma che se una funzione è α-hölderiana con $\alpha > 1/2$ allora la sua variazione quadratica lungo una qualsiasi sequenza di partizioni è nulla. Con dimostrazione.

Enunciato della sua conseguenza: quasi certamente le traiettorie del moto browniano non sono α-hölderiane con $\alpha > 1/2$.

Curiosità: simulazione di traiettorie browniane, coi comandi R

ts.plot(cumsum(rnorm(10000,0,0.01))) (in dimensone 1)

plot(c(-6,6),c(-6,6))

lines(cumsum(rnorm(10000,0,0.05)),cumsum(rnorm(10000,0,0.05))) (in dimensone 2).

29/11/2017. Generalità sui processi stocastici: modificazioni e indistinguibili, proposizione sul fatto che due modificazioni continue sono indistinguibili, cenno alla legge di un processo. Enunciato del teorema di regolarità di Kolmogorov; da esso, deduzione dell'esistenza di un moto browniano continuo; che inoltre ha traiettorie hölderiane di esponente $\alpha < \frac{1}{2}$ qualsiasi. Lemma deterministico sull'hölderianità di funzioni sui diadici:

prima parte della dimostrazione.

30/11/2017. Completamente della dimostrazione del lemma deterministico sull'hölderianità di funzioni sui diadici. Usando il lemma, dimostrazione del teorema di regolarità di Kolmogorov.

Definizione di processo di Poisson, sue traiettorie, primi passi della costruzione (definizione del processo candidato).

4/12/2017. Un passo della costruzione del processo di Poisson (verifica che, al tempo t, ha legge di Poisson di parametro t).

Definizione di speranza condizionale, elenco delle proprietà principali (senza dimostrazione) e varie interpretazioni.

6/12/2017. Definizione di legge di un processo, sia nel caso generale, sia nel caso di processi a traiettorie continue.

Definizione di processo di Markov (in senso lato) e verifica della markovianità per il moto browniano ed il processo di Poisson. Il capitolo 7 è terminato.

A completamento del Capitolo 6, cenno senza dettagli sulla costruzione di v.a. indipendenti con leggi date sull'intervallo $[0, 1]$ con la misura di Lebesgue.

7/12/2017. Capitolo 5: serie di v.a., convergenza in probabilità, convergenza quasi certa, lemma di Kolmogorov (da completare la dimostrazione).

13/12/2017. Completamento della dimostrazione del lemma di Kolmogorov. Questo esaurisce la parte in programma sulle serie di variabili aleatorie.

Lemma di Kronecker. Legge forte dei grandi numeri come corollario immediato del Lemma di Kronecker. Varie osservazioni di confronto con le leggi deboli dei grandi numeri viste altrove e con la legge forte ottenuta applicando Borel-Cantelli 1.

Legge forte dei grandi numeri di Kolmogorov. Impostazione della sua dimostrazione, cercando una successione (a_n) da usare come troncamento, in modo che le v.a. $\widetilde{X}_n = X_n 1_{|X_n| \leq a_n}$ abbiano le due proprietà desiderate (applicabilità della legge forte precedente alle $\left(\widetilde{X}_n\right)$ e convergenza a zero del resto). Nascono da verificare due condizioni: $\sum_n P\left(|X| > a_n\right) < \infty$ e $\sum_n E\left[X^2 1_{|X| \leq a_n}\right] / n < \infty$.

A titolo di esercizio, verifica che $a_n = n$ soddisfa le condizioni precedenti sotto l'ipotesi rafforzata $E\left[|X|^{1+\varepsilon}\right] < \infty$ per qualche $\varepsilon > 0$.

14/12/2017. Conclusione della legge forte dei grandi numeri di Kolmogorov (dimostrazione del lemma preliminare).

Digressione sul potenziale legame (non preciso però) con la proprietà della variazione quadratica del moto browniano.

Uso della LFGN per mostrare che non si accumulano i salti di un processo di Poisson.