1 Sulla dimostrazione del Teorema di Carathéodory

Ricordiamo che la dimostrazione del Teorema di Carathéodory procede secondo diversi passi, riassunti dal seguente diagramma:

$$(\mathcal{A}, P) \to (\mathcal{B}, P) \to (\mathcal{P}(\Omega), P^*) \to (\mathcal{C}, P^*)$$

dove i vari simboli sono spiegati nelle dispense. Lo scopo dell'esempio che segue è di mostrare l'importanza del primo passo, cioè l'estensione di P a $\mathcal{B}$.

Sia $\mathcal{A}$ l'algebra dei pluri-intervalli, di tutte le forme (chiusi, semiaperti ecc.). I singoletti, in particolare, appartengono ad $\mathcal{A}$. Sia P una probabilità finitamente additiva definita su $\mathcal{A}$ che possiede densità f rispetto alla misura di Lebesgue, nel senso che vale

$$P(A) = \int_A f(x)\,dx$$

per ogni $A \in \mathcal{A}$. Supponiamo come sempre $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$.

Proviamo a sviluppare la costruzione del teorema di Carathéodory senza introdurre la famiglia $\mathcal{B}$. Procediamo quindi a definire, per ogni insieme $C \subset \mathbb{R}$,

$$P^*(C) = \inf\{P(A)\,|A \in \mathcal{A}, C \subset A\}$$

(invece che estendere prima P a $\mathcal{B}$ e poi definire $P^*(C) = \inf\{P(B)\,|B \in \mathcal{B}, C \subset B\}$).

Consideriamo l'insieme

$$C = \mathbb{Q}.$$

Se $A \in \mathcal{A}$ contiene C, A dovrà essere uguale ad $\mathbb{R}$ salvo al più un numero finito di punti. Pertanto

$$P(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1.$$

Quindi

$$P^*(C) = 1.$$

Possiamo ora dimostrare che P^* ristretta a $\sigma(\mathcal{A})$ non è σ-additiva (cioè crolla la costruzione del teorema). Infatti, $C \in \sigma(\mathcal{A})$ (perché $\sigma(\mathcal{A})$ contiene i singoletti e C è unione numerabile di singoletti), per cui se P^* ristretta a $\sigma(\mathcal{A})$ fosse σ-additiva, siccome i singoletti hanno misura zero secondo P^* (verificarlo), allora sarebbe $P^*(C) = 0$.

Remark 1 *Il controesempio non funziona se si sbiluppa il passo relativo a $\mathcal{B}$. Infatti, si verifica facilmente che, nell'ambito dell'esempio appena sviluppato, $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$; quindi con la definizione*

$$P^*(C) = \inf\{P(B)\,|B \in \mathcal{B}, C \subset B\}$$

si trova $P^*(\mathbb{Q}) = 0$, senza alcuna contraddizione.

2 Esempi di applicazione del lemma di Borel-Cantelli I

Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. definite su uno spazio probabilizzato $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Supponiamo che siano identicamente distribuite.

Ci chiediamo: esiste una successione (positiva e divergente) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$|X_n| \leq a_n$$

definitivamente? Dove con questo termine intendiamo che per quasi ogni $\omega \in \Omega$ esista $n_0(\omega)$ tale che valga $|X_n(\omega)| \leq a_n$ per ogni $n \geq n_0(\omega)$?

Vediamo una prima risposta sotto l'ipotesi $E[|X_1|^p] < \infty$, per un certo $p \geq 1$.

Vale per la disuguaglianza di Chebyshev,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > a_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[|X_n|^p]}{a_n^p} = E[|X_1|^p] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^p}.$$

Pertanto, se supponiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^p} < \infty$, per il lemma di Borel-Cantelli parte prima vale

$$|X_n| \leq a_n$$

definitivamente. In conclusione, abbiamo risolto il seguente:

Exercise 2 *Mostrare che, se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione i.i.d. con $E[|X_1|^p] < \infty$, allora $|X_n| \leq a_n$ definitivamente, per ogni successione divergente positiva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^p} < \infty$. In particolare, per ogni $\epsilon > 0$, vale*

$$|X_n| \leq n^{\frac{1}{p}+\epsilon}$$

definitivamente.

Se poi vale $E\left[e^{\lambda|X_1|}\right] < \infty$ per un certo $\lambda > 0$, allora per ogni $\epsilon > 0$ vale $|X_n| \leq \frac{1+\epsilon}{\lambda}\log n$ definitivamente.

L'ultima parte dell'esercizio è lasciata al lettore.

Vediamo un esercizio simile ma con altra finalità. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. ed X una v.a., tutte definite su uno spazio probabilizzato $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Supponiamo (anche se sarà conseguenza delle prossime ipotesi) che X_n tenda ad X in probabilità. La finalità dell'esercizio è di trovare condizioni sufficienti affinché X_n tenda ad X quasi certamente.

Sia $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione infinitesima di numeri positivi. Vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \epsilon_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[|X_n - X|^p]}{\epsilon_n^p}.$$

Su questa base, è facile completare la risoluzione del seguente:

Exercise 3 *Mostrare che, se esistono una successione infinitesima di numeri positivi* $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ed un numero* $p \geq 1$ *tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\left[|X_n - X|^p\right]}{\delta_n} < \infty$$

allora X_n *tende a* X *quasi certamente.*

Elaboriamo questo esercizio nella direzione della Legge Forte dei Grandi Numeri. Sia $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione i.i.d. con $E\left[|Y_1|^p\right] < \infty$ (con p almeno ≥ 1) e sia $X_n = \frac{Y_1+...+Y_n}{n}$. Posto $\mu = E\left[Y_1\right]$, ci chiediamo se vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\left[|X_n - \mu|^p\right]}{\delta_n}$$

per qualche successione infinitesima di numeri positivi $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Con $p = 2$ abbiamo già fatto il conto:

$$E\left[|X_n - \mu|^2\right] = \frac{Var\left[X_1\right]}{n}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\left[|X_n - \mu|^2\right]}{\delta_n} = Var\left[X_1\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\delta_n}$$

che diverge. La potenza $p = 2$ non basta. Proviamo con $p = 4$:

$$E\left[\left|\frac{Y_1 + ... + Y_n}{n} - \mu\right|^4\right] \overset{Z_i = Y_i - \mu}{=} E\left[\left|\frac{Z_1 + ... + Z_n}{n}\right|^4\right] = \frac{1}{n^4} E\left[\sum_{i,j,k,h=1}^{n} Z_i Z_j Z_k Z_h\right].$$

In questa somma ci sono potenze quarte ($i = j = k = h$); esse ammontano a

$$\sum_{i=1}^{n} E\left[Z_i^4\right] = n \cdot E\left[Z_1^4\right].$$

Poi ci sono potenze terze per un fattore diverso (es. $i = j = k \neq h$); il loro valore atteso è nullo (per l'indipendenza e la centratura). Lo stesso accade per le quartine con indici tutti diversi e per quelle con due indici uguali e due diversi. Restano le quartine con due indici uguali e gli altri anche uguali, ma diversi dai precedenti. Per ciascuna di esse il valore atteso è pari a $E\left[Z_1^2\right]^2$. Quante sono? Un sottocaso è

$$\sum_{i,k=1}^{n} Z_i^2 Z_k^2$$

il cui valore atteso è $n^2 \cdot E\left[Z_1^2\right]^2$. Ci sono $\binom{4}{2}$ casi di questo tipo. In definitiva, possiamo dire che

$$\frac{1}{n^4} E\left[\sum_{i,j,k,h=1}^{n} Z_i Z_j Z_k Z_h\right] \leq C\frac{n^2}{n^4} = \frac{C}{n^2}$$

per un'opportuna constante $C > 0$. Otteniamo così la soluzione del seguente:

Exercise 4 *Mostrare che, se $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione i.i.d. con $E\left[|Y_1|^4\right] < \infty$, allora $\frac{Y_1+...+Y_n}{n} \to E[Y_1]$ quasi certamente.*

3 Esempi di applicazione del lemma di Borel-Cantelli II

Exercise 5 *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione i.i.d. di v.a. $B(1,p)$, $p \in (0,1)$, definita su uno spazio (Ω, F, P). Mostrare che, per q.o. $\omega \in \Omega$, il numero di 1 compare infinite volte nella sequenza $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Poniamo $A_n = \{X_n = 1\}$. Sono eventi indipendenti, aventi probabilità $p > 0$, da cui $\sum_n P(A_n) = +\infty$, quindi per il lemma di Borel-Cantelli II, per quasi ogni $\omega \in \Omega$, vale $\omega \in A_n$ per infiniti indici n; ovvero $X_n(\omega) = 1$ per infiniti indici n. L'esercizio è risolto.

Su questa falsariga, si ottengono risultati meno intuitivi, come mostra il seguente esempio.

Inventiamo un poema, che consista in una sequenza ben precisa di caratteri (includendo spazi e punteggiatura come caratteri). Supponiamo che il poema sia lungo 100.000 caratteri.

Supponiamo di avere una macchina da scrivere con un tasto per ogni carattere (minuscolo, maiuscolo, spazio ecc.). Diamo tale macchina ad una scimmia piuttosto longeva, che premerà i tasti a caso per lungo tempo. Supponiamo che i tasti scelti nelle diverse battute siano indipendenti, identicamente distribuiti e ogni tasto abbia probabilità positiva di essere scelto.

Exercise 6 *Mostrare che aspettanto abbastanza a lungo, nella sequenza scritta comparirà il nostro poema scritto per ben 100 volte (con probabilità uno).*

Mostriamo che, con probabilità uno, il poema comparirà infinite volte. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione i.i.d. di v.a. che possono assumere come valori i simboli dei diversi tasti, con le probabilità dette sopra. Introduciamo gli eventi

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(X_n)_{n=1,...,10^5} \text{ è il poema}\right\} \\ A_2 &= \left\{(X_n)_{n=10^5+1,...,2\cdot 10^5} \text{ è il poema}\right\} \\ A_3 &= \left\{(X_n)_{n=2\cdot 10^5+1,...,3\cdot 10^5} \text{ è il poema}\right\} \\ &... \end{aligned}$$

Essi sono indipendenti e $P(A_n) = \prod_{i=1}^{10^5} p_i$ dove p_i è la probabilità dell'i-esimo carattere del poema. Siccome $P(A_n) > 0$, basta ripetere quanto detto sopra nell'esercizio più semplice.

Nota: naturalmente quanto asserito nell'esercizio è irrealistico perché il tempo che si deve attendere per avere la prima versione del poema è enormemente più lungo della vita, o per lo meno della pazienza, di una scimmia.

4 Esempi di relazioni tra misure

1. Quando pensiamo ad una densità, abbastanza giustamente pensiamo al caso di misure di probabilità definite da densità rispetto alla misura di Lebesgue (questo è il caso principale per il nostro corso). Tali densità, dovendo essere integrabili all'infinito, sono in genere infinitesime, all'infinito (integrabile non implica infinitesima, ma negli esempi questo accade praticamente sempre).

Esistono esempi in cui, invece, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$?

Certamente, ma non bisogna pensare alle probabilità rispetto a Lebesgue.

Sia ν la misura definita dalla densità gaussiana canonica $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, rispetto alla misura di Lebesgue μ. Allora, μ è assolutamente continua rispetto a ν e $\frac{d\mu}{d\nu} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{x^2}{2}}$.

2. Nella definizione di misure singolari ν, μ si dice che esiste un insieme misurabile A tale che ν è portata da A e μ da A^c. Questo fa pensare che i "supporti" (qualunque cosa significhi questa parola) di ν e μ siano disgiunti. Modulo il fatto che non abbiamo definito il termine "supporto", vediamo un esercizio che all'apparenza può sembrare contro-intuitivo.

Exercise 7 *Trovare due misure singolari ν, μ portate da due insiemi misurabili B_1, B_2 con $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$.*

L'esercizio si risolve con $\nu =$ Lebesgue e $\mu = \delta_0$. Sono singolari, perché $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porta ν ed il complementare porta μ. Ma sono portate anche da $B_1 = \mathbb{R}$, $B_2 = \{0\}$, che non sono disgiunti, e da tante altre scelte non disgiunte. Ci si accorge quindi che l'esercizio non è raffintato, è solo un ingannevole gioco di parole.

Se definiamo "supporto" di una misura il più piccolo insieme chiuso che porta la misura, otteniamo un oggetto univoco. Chiediamoci ora: se due misure sono singolari, i supporti sono disgiunti? L'esempio precedente nega anche questa affermazione: il supporto di ν è $\mathbb{R}$ ed il supporto di μ è $\{0\}$. Questo esempio mette in guardia: non possiamo definire la singolarità usando la disgiunzione del "supporto" così definito. Serve il concetto un po' ambiguo di insieme che "porta" la misura.

3. La condizione di assoluta continuità di misure $\nu << \mu$ si può riformulare usando solamente la massa dei punti, cioè dicendo che $\mu(x) = 0$ implica $\nu(x) = 0$? No, basti pensare nel piano alle leggi dei vettori gaussiani (X, X) e $(X, -X)$,

con $X \sim N(0,1)$. La legge del primo è portata dalla bisettrice del primo quadrante; quella del secondo dalla bisettrice del secondo quadrante, quindi sono singolari (basta escludere l'origine da uno dei due); e tutti i punti del piano hanno misura nulla per entrambe, quindi la condizione "$\mu(x) = 0$ implica $\nu(x) = 0$" è verificata.