Metodi Matematici e Statistici
Parte di Statistica
Prova scritta del 30/5/06

Esercizio 1. Si ritiene che una generica persona acquisti il prodotto X una volta al mese con probabilità 0.5. Si ritiene inoltre che coloro che acquistano il prodotto X, durante il mese successivo comprino anche il prodotto Y nel 20% dei casi; mentre quelli che non acquistano il prodotto X, comprano (nel mese successivo) anche il prodotto Y solo nel 5% dei casi.

a) Se un nostro conoscente ci dice di aver comprato il prodotto Y, che probabilità c'è che il mese precedente abbia comprato anche il prodotto X?

b) Su 10 persone che comprano il prodotto X, che probabilità c'è che almeno 9 non comprino Y il mese successivo?

c) Su 1000 persone che comprano il prodotto X, volendo che valga almeno 0.3 la probabilità che almeno n non comprino Y il mese successivo, quanto deve essere n?

Esercizio 2. Date X discreta che vale -2, -1, 0 con ugual probabilità, $Y \sim N(3,4)$, Z di Poisson di parametro 5, tutte indipendenti,

a) calcolare media e varianza di X e $E\left[X^3\right]$;

b) calcolare $E\left[\frac{(Y-1)^2 Z^2}{X^2+1}\right]$ o almeno $E\left[(Y-1)^2 Z^2\right]$;

c) calcolare $P(-1 < XY < 1)$.

Esercizio 3. a) Da un campione di numerosità 10 ricaviamo le stime $\overline{x} = 45$ ed $S^2 = 23$. Prendendo S^2 come se fosse la varianza vera, accettando di correre un rischio del 2%, in che intervallo riteniamo sia compresa la media vera?

b) Uno studio effettuato in un altro laboratorio dichiara che la media vera è 50. Fino a quale significatività potremmo affermare che i risultati dei due laboratori sono compatibili? Spiegare il ragionamento svolto.

c) Qual'è la probabilità che il test $|z| > 1.96$ su un campione di numerosità 15 effettuato presso l'altro laboratorio, pur svolto su un campione di vera media 50, dia esito significativo?

1 Soluzioni

Esercizio 1. X = la persona acquista il prodotto X; Y = la persona acquista il prodotto Y; $P(X) = 0.5$, $P(X^c) = 0.5$, $P(Y|X) = 0.2$, $P(Y|X^c) = 0.05$.

a)

$$\begin{aligned} P(Y) &= P(Y|X)P(X) + P(Y|X^c)P(X^c) \\ &= 0.2 \cdot 0.5 + 0.05 \cdot 0.5 = 0.125 \end{aligned}$$

$$P(X|Y) = \frac{P(Y|X)P(X)}{P(Y)} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.125} = 0.8.$$

b) N = numero di persone, su 10, che compra Y, sapendo che ha comprato X, è una $B(10; 0.2)$.

$$P(N \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} \binom{10}{k} 0.2^k 0.8^{10-k} = 0.375\,81.$$

c) Ora N è una $B(1000; 0.2)$:

$$\begin{aligned} 0.3 &\leq P(N \leq 1000 - n) \\ &= P\left(\frac{N - 1000 \cdot 0.2}{\sqrt{1000}\sqrt{0.2 \cdot 0.8}} \leq \frac{1000 - n - 1000 \cdot 0.2}{\sqrt{1000}\sqrt{0.2 \cdot 0.8}} \right) \\ &\sim \Phi\left(\frac{800 - n}{12.\,649} \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{800 - n}{12.\,649} \geq q_{0.3}, \quad 800 - n \geq 12.\,649 \cdot q_{0.3}$$
$$n \leq 800 + 12.\,649 \cdot 0.53 = 806.\,7.$$

Ogni $n \leq 806$ va bene.

Esercizio 2. a)

$$\begin{aligned} \mu_X &= -2 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} = -1 \\ E\left[X^2\right] &= 4 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 1.\,666\,7 \\ \sigma_X^2 &= 1.\,666\,7 - 1 = 0.\,666\,7 \\ E\left[X^3\right] &= -8 \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} = -3. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} E\left[\frac{(Y-1)^2 Z^2}{X^2+1}\right] &= E\left[(Y-1)^2\right] E\left[Z^2\right] E\left[\frac{1}{X^2+1}\right] \\ &= 8 \cdot 30 \cdot 0.\,566\,67 = 136 \end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned} E\left[(Y-1)^2\right] &= E\left[(Y-3+2)^2\right] = E\left[(Y-3)^2 + 4 + 4(Y-3)\right] \\ &= 4 + 4 + 4(3-3) = 8 \end{aligned}$$

$$E\left[Z^2\right] = \sigma_Z^2 + \mu_Z^2 = 5 + 5^2 = 30$$

$$E\left[\frac{1}{X^2+1}\right] = \frac{1}{4+1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{0+1}\cdot\frac{1}{3} = 0.566\,67$$

c)

$$\begin{aligned}
&P(-1 < XY < 1) \\
&= P(-1 < XY < 1 | X = -2)\, P(X = -2) \\
&+ P(-1 < XY < 1 | X = -1)\, P(X = -1) \\
&+ P(-1 < XY < 1 | X = 0)\, P(X = 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P(-1 < -2Y < 1)\cdot\frac{1}{3} + P(-1 < -Y < 1)\cdot\frac{1}{3} + P(-1 < 0 < 1)\cdot\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left[P\left(-\frac{1}{2} < Y < \frac{1}{2}\right) + P(-1 < Y < 1) + 1\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\Phi\left(\frac{0.5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5-3}{2}\right) + \Phi\left(\frac{1-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right) + 1\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\Phi(-1.25) - \Phi(-1.75) + \Phi(-1) - \Phi(-2) + 1\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[-\Phi(1.25) + \Phi(1.75) - \Phi(1) + \Phi(2) + 1\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[-0.8944 + 0.9599 - 0.8413 + 0.9772 + 1\right] = 0.400\,47.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. a) $\alpha = 0.02$, $\alpha/2 = 0.01$, $1-\alpha/2 = 0.99$, $q_{0.99} = 2.33$,

$$\delta = \frac{\sqrt{23}\cdot 2.33}{\sqrt{10}} = 3.533\,6$$

$$45 - 3.533\,6 \le \mu \le 45 + 3.533\,6.$$

b) Eseguiamo un test contro l'ipotesi nulla che la media sia $\mu_0 = 50$, usando il campione sperimentale del punto 1. I risultati dei due laboratori sono compatibili se il test risulta non significativo, cioè se $|z| \le q_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Dobbiamo quindi trovare i valori di α per cui questo accade, e dichiarare il massimo di tali valori, che è il valore p. Esso è dato da

$$\begin{aligned}
p &= 2 - 2\Phi(|z|) = 2 - 2\Phi\left(\left|\frac{45-50}{\sqrt{23}}\sqrt{10}\right|\right) \\
&= 2 - 2\Phi(3.296\,9) = 2 - 2\cdot 0.9995 = 0.00\,1.
\end{aligned}$$

c) E' la probabilità dell'errore di prima specie, ovvero α. Questo vaolre di α si deduce semplicemente da 1.96. Esso è $\alpha = 0.05$.