Metodi Matematici e Statistici

Parte di Statistica

Prova scritta del 21/6/06

Esercizio 1. Per la selezione in vista del campionato del mondo, le 12 squadre di un continente devono giocare una partita di andata ed una di ritorno contro ogni altra squadra del proprio continente.

i) Quante partite vengono giocate?

Dalle statistiche si sa che un generico giocatore di calcio ha probabilità 0.02 di rimanere infortunato e necessitare di sostituzione durante la partita.

ii) Consideriamo una certa squadra. L'allenatore ha a disposizione 3 sostituzioni. Decide di non riservarne nessuna ad eventuali sostituzioni di giocatori infortunati. Che rischio corre?

iii) Trovare il numero medio di giocatori infortunati nell'intero torneo descritto al punto (i). Calcolare inoltre la probabilità che, durante quel torneo, si infortunino più di 40 giocatori. [Nel fare questi calcoli si usino liberamente alcune ipotesi semplificatrici ed alcune approssimazioni.]

Esercizio 2. Sia X Bernoulli di parametro p. Sia Y una v.a. tale che: se $X = 0$ allora $Y \sim N(1, 5)$, mentre se $X = 1$ allora $Y \sim Exp(3)$.

i) Supponiamo $p = 0$. Calcolare $E\left[(Y-1)^2 + 3Y\right]$.

ii) Supponiamo $p = \frac{1}{3}$. Calcolare $P(Y > 2)$.

iii) Calcolare $P(X = 0|Y < 1)$.

Esercizio 3. In una partita di calcio si stima che un rilancio lungo del portiere sia inutile se supera gli 80 metri. Un allenatore vuole dare indicazioni precise al suo portiere e quindi lo osserva per alcune ore di gioco, registrando la lunghezza di 100 rilanci lunghi del suo portiere. In essi la distanza media è risultata di 68 metri con una deviazione di 11 metri. Vista l'ampiezza del campione sperimentale, l'allenatore prende questi come valori teorici di media e deviazione.

i) In base a questi dati, che probabilità c'è che un rilancio sia inutile?

ii) Ogni mese l'allenatore vuole verificare che il suo portiere non abbia modificato la qualità dei suoi rilanci lunghi. Osserva allora 10 rilanci e svolge su di essi alcuni calcoli, accettando un rischio pari al 5%. Supponiamo che il portiere, a causa di un particolare tipo di allenamento, tenda ad effettuare rilanci più lunghi del solito, con una media teorica di 75 metri (ma l'allenatore non lo sa!) e deviazione 11. Che probabilità c'è che l'allenatore non se ne accorga tramite i suoi controlli?

iii) Illustrare come rispondereste al punto (i) nell'ipotesi che la v.a. rilancio sia di tipo esponenziale invece che gaussiano. Individuare però un punto debole dell'ipotesi che la v.a. sia esponenziale.

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) Ogni partita è rappresentata da un insieme di due elementi tra i 12, quindi ci sono $\binom{12}{2}$ partite di andata, e quindi

$$2 \cdot \binom{12}{2} = 12 \cdot 11.$$

Un'altra risoluzione: per individuare una partita si svolgono due esperimenti: nel primo si sceglie una squadra (12 possibilità), nel secondo una delle rimanenti (11 possibilità). Il totale è $12 \cdot 11$.

ii) Dobbiamo calcolare la probabilità che si infortuni almeno un giocatore, ovvero 1 - la probabilità che non se ne infortuni nessuno, quindi

$$1 - p^{11}$$

dove p è la probabilità che un generico giocatore non si infortuni. Vale $p = 0.98$, quindi $1 - p^{11} = 0.199\,27$.

iii) In ogni partita giocano 22 giocatori. In tutto quindi giocano una partita di torneo $22 \cdot 12 \cdot 11$ giocatori. Per ciascuno introduciamo una v.a. di Bernoulli che valga 1 se il giocatore si infortuna. quindi con probabilità 0.02. Il numero totale di infortunati S è una $B\left(22 \cdot 12 \cdot 11, 0.02\right)$. Vale quindi

$$E\left[S\right] = 22 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 0.02 = 58.\,08.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} P\left(S > 40\right) &= P\left(\frac{S - 58.\,08}{\sqrt{2904}\sqrt{0.02 \cdot 0.98}} > \frac{40 - 58.\,08}{\sqrt{2904}\sqrt{0.02 \cdot 0.98}}\right) \\ &\sim 1 - \Phi\left(\frac{40 - 58.\,08}{\sqrt{2904}\sqrt{0.02 \cdot 0.98}}\right) = 1 - \Phi\left(-2.\,396\,5\right) \\ &= \Phi\left(2.\,396\,5\right) = 0.9916. \end{aligned}$$

Esercizio 2. i) In questo caso $X = 0$ con probabilità uno, quindi $Y \sim N\left(1, 5\right)$, quindi

$$E\left[\left(Y-1\right)^2 + 3Y\right] = Var\left(Y\right) + 3E\left[Y\right] = 5 + 3 = 8.$$

ii)

$$\begin{aligned} P\left(Y > 2\right) &= P\left(Y > 2|X = 0\right) P\left(X = 0\right) + P\left(Y > 2|X = 1\right) P\left(X = 1\right) \\ &= \left(1 - \Phi\left(\frac{2-1}{\sqrt{5}}\right)\right)\frac{2}{3} + e^{-3 \cdot 2}\frac{1}{3} \\ &= \left(1 - 0.67\right)\frac{2}{3} + e^{-3 \cdot 2}\frac{1}{3} = 0.\,220\,83. \end{aligned}$$

iii)

$$P(X=0|Y<1) = \frac{P(Y<1|X=0)\,P(X=0)}{P(Y<1)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\left(1e^{-3\cdot 1}\right)\frac{1}{3}} = 0.952\,57.$$

Esercizio 3. i)

$$P(L>80) = 1-\Phi\left(\frac{80-68}{11}\right) = 1-\Phi(1.090\,9)$$
$$= 1-0.8621 = 0.137\,9.$$

ii) L'allenatore svolge un test, contro l'ipotesi nulla $\mu_0 = 68$, con un campione di numerosità 10, al 5%, ovvero con $\alpha = 0.05$, quindi $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$. L'allenatore si accorge di un cambiamento se $\left|\frac{\overline{X}-68}{11}\sqrt{10}\right| > 1.96$. Dobbiamo quindi calcolare la probabiltà che risulti $\left|\frac{\overline{X}-68}{11}\sqrt{10}\right| < 1.96$, nell'ipotesi che $\overline{X}$ provenga da una gaussiana di media 75 e deviazione 11. Questa è la probabiltà β dell'errore di seconda specie, data dalla formula

$$\beta = \Phi(d+1.96) - \Phi(d-1.96)$$

con $d = \frac{68-75}{11}\sqrt{10} = -2.012\,4$, quindi

$$\beta = \Phi(-2.012\,4+1.96) - \Phi(-2.012\,4-1.96)$$
$$\sim \Phi(-2.012\,4+1.96) = 1-\Phi(0.0\,524)$$
$$= 1-0.5199 = 0.480\,1.$$

iii) Se L è esponenziale di parametro λ, vale

$$P(L>80) = e^{-\lambda\cdot 80}.$$

Il problema è conoscere λ a partire dai dati sperimentali. λ^{-1} è il valor medio di L, quindi è ragionevole approssimarlo con 68, ovvero

$$\lambda \sim \frac{1}{68} = 1.470\,6\times 10^{-2}.$$

Da qui si trova

$$P(L>80) = e^{-\frac{80}{68}} = 0.308\,37.$$

Un punto debole sta nel fatto che per le v.a. esponenziali media e deviazione coincidono, cosa che non vale nel modo più assoluto nel nostro esempio.