Metodi Matematici e Statistici

Prova scritta – 18/9/2007

Esercizio 1. Siano X e T due v.a. indipendenti.

i) Supponiamo $X \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Calcolare media, varianza e funzione generatrice della v.a. $Y = X - 1$.

ii) Supponiamo $T \sim Exp\left(\frac{1}{5}\right)$. Calcolare $E[T^2X - 3XY]$.

iii) Calcolare $P(|T-5| < 1)$.

iv) Calcolare $P(YT > -1)$.

v) Se $T_1, ..., T_{30}$ è un campione estratto da T, calcolare approssimativamente $P(T_1 + ... + T_{30} > 150)$.

vi) Se $Y_1, ..., Y_{30}$ è un campione estratto da Y, calcolare esattamente $P(Y_1 + ... + Y_{30} > 29)$.

Esercizio 2. Sia X una v.a. di varianza nota pari a 25 ma media μ incognita. Vogliamo trovare un'approssimazione sperimentale $\hat{\mu}$ di μ tramite un campione sperimentale $x_1, ..., x_n$ estratto da X.

i) Vorremmo che, a livello di confidenza 95%, l'errore relativo fosse inferiore al 10%: $\left|\frac{\mu-\hat{\mu}}{\mu}\right| < 0.01$. Da un primo piccolo campione $x_1, ..., x_{10}$ si ottiene $\bar{x} = 37.2$. Quanti altri esperimenti bisogna fare per raggiungere lo scopo? Si eseguano le approssimazioni naturali per raggiungere un risultato concreto, anche se approssimato.

ii) Se invece ci si accontenta del campione $x_1, ..., x_{10}$, che errore assoluto e che errore relativo si ottiene?

iii) Supponiamo che quest'analisi sperimentale venga svolta allo scopo di verificare se un valore medio pari a 35, precedentemente ritenuto valido, sia davvero corretto. Al 95%, si può rifiutare l'ipotesi che la media sia 35 sulla base dei dati $x_1, ..., x_{10}$?

vi) Fino a che livelli α di significatività si potrebbe rifiutare tale ipotesi?

Soluzioni

Esercizio 1. i)

$$E[Y] = E[X] - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$Var[Y] = Var[X] = 2 \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\phi_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(X-1)}] = E[e^{tX}]e^{-t}$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t\right)e^{-t} = \frac{1}{2}(e^{-t} + 1).$$

ii)

$$E[T^2X - 3XY] = E[T^2X] - 3E[X(X-1)]$$
$$= E[T^2]E[X] - 3E[X^2] + 3E[X]$$
$$= 50 \bullet 1 - 3 \bullet \frac{3}{2} + 3 \bullet 1 = 48.5$$

essendo (posto $\lambda = \frac{1}{5}$)

$$E[T^2] = Var[T] + E[T]^2 = \frac{2}{\lambda^2} = 50$$
$$E[X^2] = Var[X] + E[X]^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

iii)

$$P(|T-5| < 1) = P(4 < T < 6) = P(T < 6) - P(T \leq 4)$$
$$= P(T > 4) - P(T \geq 6) = e^{-\frac{1}{5}\bullet 4} - e^{-\frac{1}{5}\bullet 6} = 0.148.$$

iv)

$$P(YT > -1) = P(YT > -1|X = 0)P(X = 0)$$
$$+ P(YT > -1|X = 1)P(X = 1)$$
$$+ P(YT > -1|X = 2)P(X = 2)$$

$$= P(-T > -1)\frac{1}{2^2} + P(0 > -1)2\frac{1}{2^2} + P(T > -1)\frac{1}{2^2}$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}\bullet 1}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0.795.$$

v)

$$P(T_1 + ... + T_{30} > 150) = P\left(\frac{T_1 + ... + T_{30} - 30 \bullet 5}{\sqrt{30} \bullet 5} > \frac{150 - 30 \bullet 5}{\sqrt{30} \bullet 5}\right)$$
$$\sim P(Z > 0) = 0.5$$

dove Z è una $N(0,1)$.

vi) Posto $X_k = Y_k + 1$,

$$P(Y_1 + ... + Y_{30} > 29) = P(X_1 + ... + X_{30} - 30 > 29)$$
$$= P(X_1 + ... + X_{30} > 59).$$

La v.a. $W = X_1 + ... + X_{30}$ è una $B\left(60, \frac{1}{2}\right)$ (è somma di 60 Bernoulli indipendenti di parametro $\frac{1}{2}$, essendo ciascuna X_k somma di 2 Bernoulli indipendenti di parametro $\frac{1}{2}$). Quindi la probabilità richiesta è

$$= P(W > 59) = P(W = 60) = \frac{1}{2^{60}}.$$

Esercizio 2. i) Sappiamo che, a livello di confidenza 95%,

$$\mu - \bar{x} = \pm \frac{5 \bullet 1.96}{\sqrt{n}}$$

quindi

$$\left| \frac{\mu - \bar{x}}{\mu} \right| = \frac{5 \bullet 1.96}{\mu\sqrt{n}}.$$

Quindi serve $\frac{5 \bullet 1.96}{\mu\sqrt{n}} \leq 0.01$. Ma da qui non possiamo determinare n in quanto μ è incognito. Prendiamo come approssimazione $\mu = \bar{x} = 37.2$. Allora dobbiamo risolvere $\frac{5 \bullet 1.96}{\sqrt{n}} \leq 0.372$, ovvero $\sqrt{n} \geq \frac{5 \bullet 1.96}{3.72}$, ovvero $n \geq 694.01$, quindi $n = 695$ è sufficiente.

ii) L'errore assoluto è

$$|\mu - \bar{x}| = \frac{5 \bullet 1.96}{\sqrt{10}} = 3.099$$

mentre, sempre con l'approssimazione precedente, l'errore relativo è

$$\left| \frac{\mu - \bar{x}}{\mu} \right| \sim \left| \frac{\mu - \bar{x}}{\bar{x}} \right| = \frac{5 \bullet 1.96}{37.2\sqrt{10}} = 0.083.$$

iii) No. L'errore relativo al 95% è superiore allo scarto tra l'ipotesi e la media del campione.

iv) Basta usare la formula

$$p = 2 - 2\Phi(|z|)$$

dove $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$.