**Metodi Matematici e Statistici**

Ing. Gestionale, scritto del 19/9/06

**Esercizio 1**. Stiamo esaminando l'efficienza di un nuovo fornitore. Ipotizziamo che i nostri fornitori possano essere, con ugual probabilità, di tre categorie: A = molto veloci; B = di velocità media; C = lenti. Nel caso A hanno un tempo di servizio (il tempo che intercorre tra il nostro ordine e la consegna) aleatorio, di tipo esponenziale, di media 2 giorni, nel caso B di media 5 giorni, nel caso C di media 10 giorni.

i) Non sappiamo di che categoria sia questo nuovo fornitore. Avendo però impiegato, al suo primo servizio, più di 8 giorni, riteniamo che sia di classe A, B o C?

ii) Decisa la sua classe sulla base della domanda (i), se questo fornitore esegue per noi 50 servizi, che probabilità c'è che la somma delle durate di questi servizi superi 500 giorni?

**Esercizio 2**. Sia $X$ una v.a. gaussiana di media nulla.

i) Supponiamo che $E[2X + X^2] = 1$. Quanto vale la deviazione standard?

ii) Calcolare $E\left[e^{2X+1}\right]$.

iii) Se $Y$ è distribuita come $X$ ma indipendente da $X$, che v.a. è $X - Y$?

**Esercizio 3**. La biglietteria di una stazione sciistica registra il numero di abbonamenti giornalieri domenicali, in 16 domeniche consecutive. Indichiamo con $N$ la v.a. numero di abbonamenti giornalieri domenicali.

i) Se ha stimato, sulla base delle 16 osservazioni, che il numero medio è 87 con deviazione 25, quanto stima essere la probabilità

$$P(N < 50)?$$

ii) Il risultato precedente è affetto da possibile errore derivante dal fatto che 87 non è la media vera ma solo quella sperimentale (per semplicità supponiamo invece che 25 sia la deviazione vera). Che si può dire allora con confidenza 95%, circa il valore di $P(N < 50)$?

iii) Se l'anno dopo, su 10 registrazioni domenicali, la media risulta essere di 69 abbonamenti (sempre con deviazione 25), si può ritenere che questa sia una fluttuazione statistica oppure che denoti un cambiamento del mercato? Rispondere con significatività 95%.

# 1 Soluzioni

**Esercizio 1**. Detto genericamente $T$ il tempo di servizio, e detti $T_A$, $T_B$, $T_C$ quelli nei casi $A$, $B$ e $C$, vale $T_A \sim Exp\left(\frac{1}{2}g^{-1}\right)$, $T_B \sim Exp\left(\frac{1}{5}g^{-1}\right)$, $T_C \sim Exp\left(\frac{1}{10}g^{-1}\right)$.

i) Quindi

$$P(T > 8g|A) = P(T_A > 8g) = e^{-\frac{1}{2}8} = 1.831\,6 \times 10^{-2}$$
$$P(T > 8g|B) = P(T_B > 8g) = e^{-\frac{1}{5}8} = 0.201\,9$$
$$P(T > 8g|C) = P(T_C > 8g) = e^{-\frac{1}{10}8} = 0.449\,33$$

$$\begin{aligned} P(T > 8g) &= P(T > 8g|A)P(A) + P(T > 8g|B)P(B) + P(T > 8g|C)P(C) \\ &= \frac{1}{3}\left(1.831\,6 \times 10^{-2} + 0.201\,9 + 0.201\,9\right) = 0.140\,71 \end{aligned}$$

$$P(A|T > 8g) = \frac{P(T > 8g|A)P(A)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1.831\,6 \times 10^{-2}}{0.140\,71}$$

ecc. da cui è ovvio che è maggiore $P(C|T > 8g)$. Quindi riteniamo che sia di tipo $C$.

ii) Dette $T_C^1, ..., T_C^{50}$ le durate nei 50 servizi, la somma delle durate è $T_C^1 + ... + T_C^{50}$, quindi dobbiamo calcolare

$$P\left(T_C^1 + ... + T_C^{50} > 500g\right).$$

Questo è uguale a

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{T_C^1 + ... + T_C^{50} - 50E[T_C]}{\sqrt{50}\sqrt{Var[T_C]}} > \frac{500g - 50E[T_C]}{\sqrt{50}\sqrt{Var[T_C]}}\right) \\ &= P\left(\frac{T_C^1 + ... + T_C^{50} - 500}{\sqrt{50}\sqrt{Var[T_C]}} > 0\right) \end{aligned}$$

che approssimativamente (per il TLC) vale

$$1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

**Esercizio 2**. i) $\mu = 0$,

$$E\left[2X + X^2\right] = 2E[X] + E\left[X^2\right] = E\left[X^2\right]$$

ed inoltre $E[X^2] = \sigma^2$ essendo $X$ a media nulla, quindi $E[2X + X^2] = \sigma^2$. Pertanto $\sigma^2 = 1$. $X$ è $N(0,1)$.

ii)

$$E\left[e^{2X+1}\right] = E\left[e^{2X}e\right] = eE\left[e^{2X}\right] = e\varphi(2)$$

dove $\varphi(x)$ è la funzione generatrice dei momenti. Pertanto

$$E\left[e^{2X+1}\right] = e \cdot e^{\frac{2^2}{2}} = e^3 = 20.086.$$

iii) Un noto teorema dice che la combinazione lineare di gaussiane indipendenti è gaussiana. La media di $X - Y$ è

$$E[X - Y] = E[X] - E[Y] = 0$$

mentre la varianza è

$$Var[X - Y] = Var[X] + Var[-Y] = Var[X] + Var[Y] = 2.$$

Pertanto $X - Y$ è $N(0,2)$.

**Esercizio 3**. Indichiamo con $n_1, ..., n_{16}$ le 16 registrazioni della biglietteria.

i) Avendo trovato media 87 con deviazione 25, supponendole per semplicità pari a quelle vere (e supponendo $N$ gaussiana), vale

$$P(N < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 87}{25}\right) = \Phi(-1.48) = 0.0694.$$

ii) Vale

$$\mu = 87 \pm \delta$$

con confindenza 95%, dove

$$\delta = \frac{25q_{0.975}}{4} = \frac{25 \cdot 1.96}{4} = 12.25.$$

Pertanto, con confidenza 95%, potrebbe nei due casi limite essere

$$\mu = 87 + 12.25 = 99.25$$

nel qual caso

$$P(N < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 99.25}{25}\right) = \Phi(-1.97) = 0.0244$$

oppure

$$\mu = 87 - 12.25 = 74.75$$

nel qual caso

$$P(N < 50) = \Phi\left(\frac{50 - 74.75}{25}\right) = \Phi(-0.99) = -0.1610.$$

Quindi, con confindenza 95%, possiamo affermare che

$$0.0244 \leq P(N < 50) \leq 0.1610.$$

iii) Usiamo come ipotesi nulla l'affermazione $\mu_0 = 87$. Calcoliamo

$$z = \frac{69 - 87}{25}\sqrt{10} = -2.2768$$

e confrontiamone il valore assoluto con $q_{0.975} = 1.96$. Il test risulta significativo, ovvero sembra esserci un cambiamento del mercato.