Metodi Matematici e Statistici

Prova scritta – 17/09/2009

Le domande valgono 3 punti ciascuna.

1. Supponiamo che la durata (in ore) di un componente elettronico di un apparato sia descritta da una v.a. $T \sim N(\mu, \sigma^2)$. T rappresenta l'istante in cui il componente si brucia. Supponiamo $\mu = 123.1$, $\sigma = 7.5$. Se si lascia in attività il componente per un tempo pari a 110 ore, con che probabilità ci aspettiamo di trovarlo bruciato?

2. Supponiamo di voler correre un rischio dello 0.001. Su quanto tempo di lavoro possiamo contare?

3. Per rendere più robusto l'apparato elettronico si mettono in parallelo 3 componenti uguali. Il sistema smette di funzionare se si bruciano tutti e tre i componenti. Dopo 110 ore, con che probabilità l'intero sistema sarà non funzionante?

4. Anche se non si arriva alla rottura completa del sistema, quando due su tre delle componenti si bruciano, il sistema non funziona più in modo ottimale. Con che probabilità questo accade (sempre nella situazione della domanda precedente, cioè dopo 110 ore)?

5. Torniamo un po' indietro nel tempo. Il produttore di quei componenti elettronici vuole stimare sperimentalmente la loro durata. Accetta come vero il valore $\sigma = 7.5$. Per stimare la durata media al 95% con un errore pari a 3 ore, quanti esemplari deve esaminare?

6. Supponiamo di aver stimato $\mu = 123.1$. Un tecnico propone una variante della struttura del componente, che a suo parere aumenta la durata. Il produttore non ha la minima idea se tale variante migliori o peggiori o lasci invariata la durata. Esamina 20 esemplari e trova $\overline{x} = 131.8$. Che deve pensare?

7. Date $X_1, ..., X_{40}$ v.a. indipendenti, con la stessa distribuzione, non gaussiana, media e varianza pari a 4, calcolare $P(|X_1 + ... + X_{40} - 160| > 20)$.

8. Calcolare $E\left[X_1 X_2^2 - (X_3 - 4)^2\right]$.

9. Se le v.a. X_i precedenti sono delle $B(4, 0.1)$, calcolare $P(X_1 + X_2 = 1)$.

10. Se invece le v.a. X_i precedenti sono delle $B(1, 0.1)$, calcolare $E\left[\frac{1+X_1}{1+X_2}\right]$.

1 Soluzioni

1. $T \sim N\left(123.1, 7.5^2\right)$

$$P\left(T < 110\right) = \Phi\left(\frac{110 - 123.1}{7.5}\right) = \Phi\left(-1.747\right) = 0.04.$$

2. Detto t il tempo cercato, deve valere

$$P\left(T < t\right) = 0.001$$

quindi

$$t = 123.1 - 7.5 \cdot q_{0.999} = 123.1 - 7.5 \cdot 3.09 = 99.925.$$

3. Dette T_1, T_2, T_3 le durate dei tre esemplari, calcoliamo

$$P\left(T_1 < 110, T_2 < 110, T_3 < 110\right) = P\left(T < 110\right)^3 = 0.04^3 = 6.4 \times 10^{-5}.$$

4. Introduciamo le v.a. X_1, X_2, X_3, $X_i = 1$ se l'esemplare i-esimo si rompe, quindi con probabilità 0.04; $X_i = 0$ altrimenti, quindi con probabilità 0.96. La v.a. $S = X_1 + X_2 + X_3$ è il numero di esemplari rotti ed è una $B\left(3, 0.04\right)$. Dobbiamo calcolare

$$P\left(S = 2\right) = \binom{3}{2} 0.04^2 \cdot 0.96 = 0.0046.$$

5. L'errore δ corrispondente a n prove è pari a $\frac{\sigma q_{0.975}}{\sqrt{n}}$ quindi dobbiamo risolvere

$$\frac{\sigma q_{0.975}}{\sqrt{n}} \leq 3$$

ovvero

$$n \geq \left(\frac{\sigma q_{0.975}}{3}\right)^2 = \left(\frac{7.5 \cdot 1.96}{3}\right)^2 = 24.01$$

cioè $n = 25$ (o più o meno anche solo 24).

6. $z = \frac{131.8-123.1}{7.5}\sqrt{20} = 5.187$. Sia il calcolo di p (praticamente nullo al nostro solito livello di approssimazione) sia il test fissato un ragionevole α, indicano un miglioramento nettissimo.

7.
$$P\left(|X_1+...+X_{40}-160|>20\right)=2P\left(X_1+...+X_{40}\geq 180\right)$$

$$\begin{aligned}&=2P\left(\frac{X_1+...+X_{40}-40\cdot 4}{\sqrt{40}2}>\frac{180-40\cdot 4}{\sqrt{40}2}\right)\\&\sim 2\left(1-\Phi\left(1.581\right)\right)=0.1\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}E\left[X_1X_2^2-\left(X_3-4\right)^2\right]&=E\left[X_1\right]E\left[X_2^2\right]-E\left[\left(X_3-4\right)^2\right]\\&=4\cdot E\left[X_1^2\right]-Var\left[X_1\right]=4\cdot E\left[X_1^2\right]-4.\end{aligned}$$

Inoltre,
$$E\left[X_1^2\right]=Var\left[X_1\right]+E\left[X_1\right]^2=4+16=20.$$
In conclusione, il risultato è
$$4\cdot 20-4=76.$$

9. Una soluzione consiste nell'usare il fatto che $X_1+X_2\sim B\left(8,0.1\right)$; per cui
$$P\left(X_1+X_2=1\right)=\binom{8}{1}\cdot 0.1^1\cdot 0.9^7=0.382.$$
Un'altra è

$$\begin{aligned}P\left(X_1+X_2=1\right)=P\left(X_1+X_2=1|X_2=0\right)P\left(X_2=0\right)\\+P\left(X_1+X_2=1|X_2=1\right)P\left(X_2=1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=P\left(X_1=1\right)P\left(X_2=0\right)+P\left(X_1=0\right)P\left(X_2=1\right)\\&=2\cdot P\left(X_1=1\right)P\left(X_1=0\right)\\&=2\cdot\binom{4}{1}\cdot 0.1^1\cdot 0.9^3\cdot\binom{4}{0}\cdot 0.1^0\cdot 0.9^4=0.382.\end{aligned}$$

10.

$$E\left[\frac{1+X_1}{1+X_2}\right]=E\left[1+X_1\right]E\left[\frac{1}{1+X_2}\right]=\left(1+0.1\right)\cdot E\left[\frac{1}{1+X_1}\right].$$

La v.a. $\frac{1}{1+X_1}$ assume il valore 1 ($X_1 = 0$) con probabilità 0.9, mentre assume il valore $\frac{1}{2}$ ($X_1 = 1$) con probabilità 0.1. Pertanto

$$E\left[\frac{1}{1+X_1}\right] = 1 \cdot 0.9 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 = 0.95.$$

In definitiva, il risultato è $= 1.045$.