Metodi Matematici e Statistici

Prova scritta – 4/5/2009

Le domande valgono 3 punti ciascuna.

1. Indichiamo con $X \sim N(25, 9)$ il guadagno giornaliero di un negozio. Con probabilità 0.9, su che guadagno può contare, in un generico giorno?

2. Su cento giorni, quante volte mediamente accade che il guadagno sia inferiore a 20?

3. Siano $X_1, ..., X_{30}$ i guadagni relativi a 30 giorni (che supponiamo indipendenti) e sia $S = X_1 + ... + X_{30}$ il guadagno totale. Calcolare media e varianza di S e la probabilità che S superi $26 \cdot 30$.

4. La nostra azienda effettua un investimento, che può produrre un aumento della produzione oppure no. Stimiamo che l'investimento faccia aumentare la produzione con probabilità 0.8. Se ci sarò l'aumento, con probabilità 0.9 ci saranno nuove assunzioni, altrimenti esse ci saranno solamente con probabilità 0.2. Che probabilità c'è ci siano nuove assunzioni?

5. Un rivenditore di auto vende 3 auto al giorno con probabilità 0.1, 2 auto con probabilità 0.2, un'auto con probabilità 0.4, nessuna con probabilità 0.3. Calcolare media e deviazione standard delle sue vendite giornaliere.

6. Il tempo necessario per la vendita di un immobile viene descritto con una v.a. esponenziale. L'esperienza di 10 vendite ha dato i seguenti valori: 75, 179, 215, 40, 30, 55, 32, 55, 38, 10. Se dobbiamo predire la probabilità che servano più di 60 giorni a vendere un immobile, che valore possiamo dare?

7. Nel problema precedente, stimare il tempo medio di vendita dando l'intervallo di confidenza al 95%.

8. Se X, Y sono gaussiane canoniche indipendenti, calcolare $E\left[e^{2Y-2X}\right]$.

9. Il diametro medio di un componente metallico deve essere di 23 millimetri. La lavorazione è sempre lievemente imprecisa, per cui si ritiene che il diametro sia una v.a. gaussiana di deviazione standard pari a 0.5 millimetri. Un giorno viene effetuato un controllo su 100 pezzi e si vede che il loro diametro medio è di 23.5 millimetri. Al 95% si può ritenere che ci sia un peggioramento della produzione, oppure è solo effetto del caso?

10. Il test precedente, che potenza ha di osservare una variazione di 0.5 millimetri nella media?

1 Soluzioni

1. Può contare sul guadagno g tale che $X \geq g$ con probabilità 0.9, ovvero $P(X \geq g) = 0.9$. La soluzione è

$$g = 25 - 3q_{0.9} = 25 - 3 \cdot 1.28 = 21.16.$$

2. Su cento giorni, quante volte mediamente accade che il guadagno sia inferiore a 20? La probabilità che il guadagno sia inferiore a 20, $P(X < 20)$, è data da

$$\Phi\left(\frac{20 - 25}{3}\right) = \Phi(-1.666) = 0.04.$$

3. La v.a. S è gaussiana in quanto somma di gaussiane indipendenti. La sua media è la somma delle medie, quindi pari a $30 \cdot 25$; la varianza, essendo indipendenti, è somma delle varianze, quindi pari a $30 \cdot 9$. La probabilità che S superi $26 \cdot 30$, $P(S > 26 \cdot 30)$, è data da

$$1 - \Phi\left(\frac{26 \cdot 30 - 25 \cdot 30}{\sqrt{30 \cdot 9}}\right) = 1 - \Phi(1.826) = 0.035.$$

4. Indichiamo con A l'evento "aumento della produzione", con N l'evento "nuove assunzioni". Abbiamo $P(A) = 0.8$, $P(A^c) = 0.2$, $P(N|A) = 0.9$, $P(N|A^c) = 0.2$, quindi

$$P(N) = P(N|A)\,P(A) + P(N|A^c)\,P(A^c) = 0.9 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.76.$$

5. Usiamo la v.a. V = numero di auto vendute. Vale

$$E[V] = 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.3 = 1.1$$

$$E\left[V^2\right] = 3^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.3 = 2.1$$

quindi $Var[V] = 2.1 - 1.1^2 = 0.89$, $\sigma = \sqrt{0.89} = 0.943$.

6. La somma dei valori è 729, quindi la media aritmetica è $\overline{x} = 72.9$. Il parametro λ dell'esponenziale è l'inverso della media, quindi lo stimiamo con $\frac{1}{\overline{x}} = 0.014$. Allora approssimativamente varrà $P(T > 60) = e^{-0.014 \cdot 60} = 0.432$.

7. La stima è $\overline{x} = 72.9$. L'ampiezza dell'intervallo che possiamo dichiarare è approssimativamente (visto che non si tratta di gaussiane) $\delta = \frac{Sq_{0.975}}{\sqrt{10}}$ (o forse un po' più precisamente con la t di Student) dove S è la deviazione standard sperimentale. Seguono i calcoli.

8. $$E\left[e^{2Y-2X}\right] = E\left[e^{2Y}\right] E\left[e^{-2X}\right] = \phi_Y(2)\,\phi_X(-2) = e^{\frac{2^2}{2}} e^{\frac{2^2}{2}} = e^4 = 54.598.$$

9. Introduciamo la v.a. D = diametro, $N(23, 0.5^2)$ in condizioni di buona produzione. Il valore medio sperimentale è però $\overline{x} = 23.5$, su 100 pezzi. Calcoliamo $z = \frac{23.5-23}{0.5}\sqrt{100} = 10$. Questo supera nettamente $q_{0.975}$, quindi il test è significativo e concludiamo che la produzione è peggiorata.

10. Il test precedente, che potenza ha di osservare una variazione di 0.5 millimetri nella media?

$$1 - \Phi\left(\frac{23-23.5}{0.5}\sqrt{100} + 1.96\right) - \Phi\left(\frac{23-23.5}{0.5}\sqrt{100} - 1.96\right) = ...$$