Metodi Matematici e Statistici

Prova scritta – 2/7/2009

Le domande valgono 3 punti ciascuna.

1. Un benzinaio vende L litri di benzina al giorno, L v.a. gaussiana. Se $L \sim N(400, 100^2)$, quanti litri deve tenere giornalmente per soddisfare le richieste al 99%?

2. Se guadagna 0.30 euro al litro, che probabilità ha di guadagnare meno di 110 euro?

3. E nell'arco di 10 giorni, che probabilità ha di guadagnare meno di $110 \cdot 10$ euro?

4. Viene aperto un nuovo distributore a pochi chilometri di distanza. Dopo un certo periodo il benzinaio ha il sospetto che le vendite siano calate. Osserva per due settimane, cioè 12 giorni, le vendite e trova una media aritmetica pari a 382.6 litri. Che cosa è ragionevole pensare? A quale causa attribuireste il risultato?

5. Non convinto delle misurazioni di quelle due settimane, decide di stimare la media attuale delle vendite con una precisione di 5 litri, al 95%. Di quanti giorni di registrazione ha bisogno? Qual'è la causa principale del risultato "irragionevole"?

6. Il benzinaio ha sia pompe self service sia pompe servite. La popolazione sopra una certa età è il 30% dei guidatori e sceglie il servito 80 volte su 100. Quelli sotto tale età scelgono il servito solo il 30% delle volte. Quando il benzinaio vede arrivare un nuovo cliente, pensa che si rivonga al servito oppure no?

7. Date X, Y esponenziali indipendenti di media 2, calcolare la varianza di $X - Y$.

8. Se inoltre Z è una Bernoulli di parametro $\frac{1}{3}$, indipendente da X ed Y, calcolare $P(X > Z)$.

9. Calcolare poi $E\left[Y e^{Z+\frac{X}{4}}\right]$.

10. Se $X_1, ..., X_{50}$ sono distribuite come X, indipendenti, calcolare $P(X_1 + ... + X_{50} > 100)$.

1 Soluzioni

1. Detto l il numero desiderato, deve valere
$$P(L < l) = 0.99$$
quindi
$$l = 400 + 100 \cdot q_{0.99} = 400 + 100 \cdot 2.326 = 632.6.$$

2. Detto G il guadagno, vale $G = 0.3 \cdot L$, quindi
$$\begin{aligned} P(G < 110) = P\left(L < \frac{110}{0.3}\right) &= P(L < 366.67) \\ = \Phi\left(\frac{366.67 - 400}{100}\right) &= \Phi(-0.333) = 0.369. \end{aligned}$$

3. Le richieste L_{10} in 10 giorni sono una $N(10 \cdot 400, 10 \cdot 100^2)$, quindi, detto G_{10} il relativo guadagno,
$$\begin{aligned} P(G_{10} < 110 \cdot 10) = P\left(L_{10} < \frac{110 \cdot 10}{0.3}\right) &= \Phi\left(\frac{\frac{110 \cdot 10}{0.3} - 10 \cdot 400}{\sqrt{10}100}\right) \\ &= \Phi(-1.054) = 0.146. \end{aligned}$$

4. $z = \frac{382.6 - 400}{100}\sqrt{12} = -0.602$. Sia il calcolo di p (unilaterale o meno) sia il test fissato un ragionevole α, non indicano un peggioramento. La causa principale del risultato è dovuta alla deviazione molto alta.

5. L'errore δ relativo a n prove è pari a $\frac{\sigma q_{0.975}}{\sqrt{n}}$ quindi dobbiamo risolvere
$$\frac{\sigma q_{0.975}}{\sqrt{n}} \leq 5$$
ovvero
$$n \geq \left(\frac{\sigma q_{0.975}}{5}\right)^2 = \left(\frac{100 \cdot 1.96}{5}\right)^2 = 1536.6$$
cioè $n = 1537$. Di nuovo, la causa è la deviazione molto alta.

6. SS=self service, SE=servite, A=anziani, G=giovani. $P(A) = 0.3$, $P(G) = 0.7$, $P(SE|A) = 0.8$, $P(SE|G) = 0.3$, quindi
$$\begin{aligned} P(SE) &= P(SE|A)P(A) + P(SE|G)P(G) \\ &= 0.8 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.45 \end{aligned}$$
quindi no, pensa che non si rivolga al servito.

7. Il parametro delle esponenziali è $\lambda = \frac{1}{2}$, la varianza è $\frac{1}{\lambda^2} = 4$, poi

$$Var\left[X - Y\right] = Var\left[X\right] + Var\left[-Y\right] = Var\left[X\right] + Var\left[Y\right] = 8.$$

8.

$$\begin{aligned} P\left(X > Z\right) &= P\left(X > Z|Z = 0\right)P\left(Z = 0\right) + P\left(X > Z|Z = 1\right)P\left(Z = 1\right) \\ &= P\left(X > 0\right)P\left(Z = 0\right) + P\left(X > 1\right)P\left(Z = 1\right) \\ &= 1 \cdot \frac{2}{3} + e^{-\frac{1}{2}\cdot 1}\frac{1}{3} = 0.869. \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} E\left[Ye^{Z+\frac{X}{4}}\right] &= E\left[Y\right]E\left[e^{Z}\right]E\left[e^{\frac{X}{4}}\right] = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}e + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} \\ &= 6.291. \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} P\left(X_1 + ... + X_{50} > 100\right) &= P\left(\frac{X_1 + ... + X_{50} - 50 \cdot 2}{\sqrt{50}2} > \frac{100 - 50 \cdot 2}{\sqrt{50}2}\right) \\ &\sim \Phi\left(\frac{100 - 50 \cdot 2}{\sqrt{50}2}\right) = \Phi\left(0\right) = 0.5. \end{aligned}$$