Metodi Matematici e Statistici
Prova scritta – 12/6/2009

Le domande valgono 3 punti ciascuna.

1. Le richieste di pane fresco ad una Coop nell'arco di una giornata, in kg, sono una v.a. $R \sim N(80, 100)$. La Coop tiene 100 kg ogni giorno, per sicurezza. Con che probabilità ne avanzano più di 30 kg?

2. Quanto spesso i 100 kg non bastano? Quanti ne dovrebbe tenere perche' bastassero 99 giorni su 100?

3. Il negozio tiene anche un bene di consumo che viene richiesto molto di rado. La probabilità giornaliera di una richiesta è di 0.1, mentre 0.9 è la probabilità che non ci sia alcuna richiesta. In 10 giorni, che probabilità c'è che ci siano almeno due richieste?

4. Una macchina utensile ha due punti deboli, A e B. Il primo si usura il doppio delle volte del secondo, in media. Se si usura il primo, con probabilità 0.5 la macchina si rompe. Se si usura il secondo, si rompe con probabilità 0.1. Quando il riparatore vede la macchina rotta, che probabilità attribuisce alla possibilità che si sia usurato A?

5. Se X vale -1, 0, 1 con ugual probabilità ed Y è una Bernoulli di parametro $p = 0.2$, e sono indipendenti, calcolare la funzione generatrice dei momenti di $X + Y$.

6. Calcolare inoltre $P(X + Y = 0)$.

7. Se X, Y, Z sono esponenziali indipendenti di media 5, calcolare $E[X^2Y^2Z^2 - XYZ]$.

8. Si vuole predisporre un controllo della qualità per lo spessore dei fogli di carta da fotocopiatrice, prodotti da una cartiera. Tale spessore è aleatorio, di legge $N(0.1, 0.01^2)$ in condizioni corrette. I fogli, per essere buoni, non devono diventare né troppo sottili né troppo spessi. Supponiamo che la varianza resti inalterata, quindi il controllo sia sulla media. Il controllo consiste nell'esame di 20 fogli presi a caso in un lotto: se ne misura lo spessore e si fa la media $\overline{x}$, poi si calcola il valore p. Ci si allarma se p è piccolo oppure se p è grande? Spiegare il perche'.

9. Fissare una soglia ragionevole per il valore di p, decidendo che se durante un controllo di un lotto si riscontra che il valore di p ha superato la soglia, si dà l'allarme al reparto produttivo. Dire se (relativamente alla soglia scelta) scatta l'allarme in un controllo in cui si è rilevato il valore $\overline{x} = 0.09$.

10. Mediamente ogni 20 ore di lavoro, bisogna sostituire la cartuccia di una stampante. La durata di una cartuccia però è aleatoria a causa della differente richiesta di inchiostro delle differenti stampe. La deviazione standard di questo tempo aleatorio è di 5 ore. La distribuzione statistica non è gaussiana, ma Weibull (non importa la formula esatta). Interessa calcolare il numero n di cartucce che garantiscono la stampa per 1000 ore di lavoro, con probabilità 0.9. Mostrare che n soddisfa approssimativamente la relazione

$$20n \geq 1000 - 5\sqrt{n}q_{0.1}$$

1 Soluzioni

1. Ne avanzano più di 30 kg se $R < 70$, quindi con probabilità
$$P(R < 70) = \Phi\left(\frac{70-80}{10}\right) = \Phi(-1) = 0.1587.$$

2. 100 kg non bastano se $R > 100$, quindi con frequenza
$$P(R > 100) = 1 - \Phi\left(\frac{100-80}{10}\right) = 1 - \Phi(2) = 0.0228.$$
Indichiamo con λ il numero di kg da tenere per avere una frequenza pari a 1/100. L'equazione è
$$P(R > \lambda) = 0.01$$
da cui
$$\lambda = 80 + 10q_{0.99} = 80 + 10 \cdot 2.326 = 103.26.$$

3. Sia $X_i = 1$ se nel giorno i-esimo c'è una richiesta, $X_i = 0$ altrimenti. Le X_i sono Bernoulli 0.1 indipendenti. $S = X_1 + ... + X_{10}$ è il numero di richieste in 10 giorni, ed è $B(10, 0.1)$. S vale almeno 2 con probabilità
$$\begin{aligned} P(S \geq 2) &= 1 - P(S < 2) = 1 - P(S = 0) - P(S = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} 0.1^0 0.9^{10} - \binom{10}{1} 0.1^1 0.9^9 = 0.264. \end{aligned}$$

4.
$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = 0.5\frac{2}{3} + 0.1\frac{1}{3} = 0.3666$$
$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{0.5\frac{2}{3}}{0.3666} = 0.909.$$

5.
$$E\left[e^{t(X+Y)}\right] = E\left[e^{tX}\right]E\left[e^{tY}\right] = \left(\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{t}\right)\left(0.8 + 0.2e^{t}\right).$$

6.

$$
\begin{aligned}
&P(X+Y=0)\\
&= P(X+Y=0|Y=0)\,P(Y=0)+P(X+Y=0|Y=1)\,P(Y=1)\\
&= 0.8\cdot P(X=0)+0.2\cdot P(X+1=0)\\
&= \frac{0.8}{3}+\frac{0.2}{3}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

7. $E[X]=5$ implica $Var[X]=25$, $E[X^2]=25+25=50$,

$$E\left[X^2Y^2Z^2-XYZ\right]=E\left[X^2\right]^3-E[X]^3=50^3-5^3.$$

8. Ci si allarma se p è piccolo. Infatti p è il più piccolo valore di α, errore di prima specie, relativamente a cui il test è significativo, cioè afferma che la media del campione non corrisponde alla media ipotizzata. Più è piccolo α per cui il test è significativo, più tale errore è piccolo, cioè con elevata sicurezza il test nega l'ipotesi.

9. Una soglia abbastanza classica è $p=0.05$ (lo studente è libero di scegliere quello che vuole, basta che sia ragionevole). Vale $z=\frac{0.09-0.1}{0.01}\sqrt{20}=-4.472$, che produce

$$p=2-2\Phi(|z|)$$

che è quasi zero, assai sotto la soglia fissata. Diamo l'allarme.

10. $E[D_i]=20$, $Var[D_i]=5^2$, la durata $D_{tot,n}=\sum_{i=1}^n D_i$ di n cartucce ha $E[D_{tot,n}]=20n$, $Var[D_{tot,n}]=5^2n$, vogliamo che

$$P(D_{tot,n}>1000)\geq 0.9.$$

Per il TLC vale approssimativamente

$$
\begin{aligned}
0.9\leq P\left(\sum_{i=1}^n D_i>1000\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^n D_i-20n}{\sqrt{5^2n}}>\frac{1000-20n}{\sqrt{5^2n}}\right)\\
\sim P\left(Z>\frac{1000-20n}{5\sqrt{n}}\right) &= 1-\Phi\left(\frac{1000-20n}{5\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}
$$

da cui

$$\Phi\left(\frac{1000-20n}{5\sqrt{n}}\right)\leq 0.1,\quad \frac{1000-20n}{5\sqrt{n}}\leq q_{0.1}$$

$$1000-20n\leq 5\sqrt{n}q_{0.1}.$$