Metodi Matematici e Statistici

Prova scritta – 6/6/2007

Esercizio 1. Siano X, Y e Z tre v.a. indipendenti, X che assume solo i valori -1, 0 ed 1 ed ha media nulla, $Y \sim N(3,2)$, $Z \sim Exp(5)$.

i) Se X ha varianza 1, calcolare $P(X = 1)$ e calcolare la generatrice di X.

ii) Calcolare $E[XY - Y^2Z]$ e $E[e^{Z-Y}]$.

iii) Calcolare $P(|Y-3| > 1)$.

iv) Calcolare $P(XY < 0)$.

v) Calcolare $E\left[\frac{Z^2}{1+|X|}\right]$.

vi) Se $Z_1, ..., Z_{50}$ è un campione estratto da Z, calcolare $P(Z_1 + ... + Z_{50} < 10)$.

Esercizio 2. Sia X una grandezza gaussiana di media μ e varianza $\sigma^2 = 1$.

i) Che numerosità serve per stimare μ al 90% con un errore pari ad 1?

ii) Da un campione di numerosità 20 si è ottenuto $x_1 + ... + x_{20} = 60$. Dare un intervallo di confidenza per μ al 90%.

iii) Trovare il numero t tale che X è maggiore di t con probabilità 0.9.

iv) Calcolare la probabilità che X superi 4, tenendo conto dell'incertezza trovata risolvendo il punto ii).

v) Qualcuno afferma che la media di X è 4. Al 95%, si può rifiutare quest'affermazione sulla base dei dati del punto ii)?

vi) A che livelli α di significatività si potrebbe rifiutare l'affermazione che la media di X sia 4?

Soluzioni

Esercizio 1. i) Media nulla implica $P(X = -1) = P(X = 1)$. Calcolando poi la varianza (che si riduce a $E[X^2]$) si trova $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 0) = 0$. Fatto questo, per la generatrice vale $\varphi(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$.

ii) Per l'indipendenza e per linearità

$$E[XY - Y^2Z] = E[X]E[Y] - E[Y^2]E[Z]$$

dove poi $E[X] = 0$, $E[Z] = 1/5$, $E[Y^2] = Var[Y] + E[Y]^2 = 11$, da cui il risultato è $-11/5$. Vale poi

$$E[e^{Z-Y}] = E[e^Z]E[e^{-Y}] = \varphi_Z(1)\varphi_Y(-1)$$

dove poi vanno sostituiti i valori delle generatrici di Z e Y nei punti $t = 1$ e $t = -1$, rispettivamente.

iii) Posto $Y' = \frac{Y-3}{\sqrt{2}}$, vale $Y' \sim N(0,1)$. Allora

$$\begin{aligned} P(|Y-3| > 1) &= P\left(|Y'| > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(Y' > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + P\left(Y' < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = ... \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} P(XY < 0) = {} & P(XY < 0|X = -1)P(X = -1) \\ & + P(XY < 0|X = 1)P(X = 1) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}P(Y > 0) + \frac{1}{2}P(Y < 0) = \frac{1}{2}.$$

v)

$$E\left[\frac{Z^2}{1+|X|}\right] = E[Z^2]E\left[\frac{1}{1+|X|}\right]$$

dove poi $E[Z^2]$ si calcola con $Var[Z] + E[Z]^2$, mentre $E\left[\frac{1}{1+|X|}\right]$ si calcola usando la definizione di valor medio (per v.a. discrete).

vi)

$$\begin{aligned} &P(Z_1 + ... + Z_{50} < 10) \\ &= P\left(\frac{Z_1 + ... + Z_{50} - 50 \bullet \frac{1}{5}}{\sqrt{50}\sqrt{Var[Z]}} < \frac{10 - 50 \bullet \frac{1}{5}}{\sqrt{50}\sqrt{Var[Z]}}\right) \\ &\sim P(W < 0) \end{aligned}$$

dove $W \sim N(0,1)$, quindi il risultato è $\frac{1}{2}$.

Esercizio 2. i) Si impone $\frac{1 \bullet q_{1-0.05}}{\sqrt{n}} \leq 1$, da cui si trova che il più piccolo n che la verifica è $n = 3$.

ii) A livello di confidenza 90%

$$\mu = \frac{60}{20} \pm \frac{1 \bullet q_{1-0.05}}{\sqrt{20}} = 3 \pm 0.366.$$

iii) Si impone $P(X > t) = 0.9$ dove $X \sim N(3,1)$. Si trova

$$t = 3 - q_{0.9} = ...$$

iv) *A livello di confidenza* 90% $P(X > 4)$ è compresa tra i valori che si ottengono se fosse $X \sim N(3 - 0.366, 1)$ e se fosse $X \sim N(3 + 0.366, 1)$, cioè

$$1 - \Phi(4 - (3 - 0.366)) \leq P(X > 4) \leq 1 - \Phi(4 - (3 + 0.366))$$

(dove poi si completano i calcoli).

v) Si esegue il test $|z| \geq q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dove $\alpha = 0.05$ e $z = \frac{3-4}{1}\sqrt{20} = -4.47$. Il test risulta significativo.

vi) A tutti i livelli $\alpha > p$, dove p è il valore p dato da

$$p = 2 - 2\Phi(|z|) = ...$$