Metodi Matematici e Statistici
Prova scritta – 28/1/2008

Esercizio 1. i) Sia X una v.a. di Poisson di parametro 4, $X \sim \mathcal{P}(4)$: calcolare media, varianza e generatrice della v.a. $X' = 3 - 2X$.

ii) Date $X, Y \sim \mathcal{P}(4)$ indipendenti, calcolare media, varianza e generatrice della v.a. $Z = X - Y$.

iii) Calcolare inoltre $P(X > 1, Y < 1)$.

iv) Calcolare inoltre $P(XY \leq 2)$.

v) Calcolare infine $E\left[\frac{X+Y}{W+1}\right]$ dove $W \sim B(1, p)$.

Esercizio 2. Sia L la lunghezza del salto di un saltatore in lungo. Supponiamo sia gaussiana di media μ e deviazione $\sigma = 0.4$ metri.

i) Il suo allenatore vuole stimare μ. Quanti salti deve osservare se vuole commettere un errore al più di 10 cm, al 90%?

ii) Dopo 20 salti ha calcolato $x_1 + ... + x_{20} = 107$ metri. Che stima può dare di μ al 90% ed al 95%?

iii) Sulla base delle stime precedenti, con che probabilità salterà almeno 4 metri?

iv) E che lunghezza minima ci sia aspetta che superi, con probabilità 0.8?

v) Due mesi dopo, misurando altri 20 salti, si trova $x_1 + ... + x_{20} = 101$ metri. Si può dire che sia peggiorato fisicamente oppure questo risultato rientra nelle fluttuazioni casuali?

1 Soluzioni

Esercizio 1. i)

$$\begin{aligned}
E[X'] &= 3 - 2 \cdot 4 = -5 \\
Var[X'] &= Var[-2X] = 4Var[X] = 16 \\
\phi_{X'}(t) &= e^{3t}\phi_X(-2t) = e^{-4+3t}e^{4e^{-2t}}
\end{aligned}$$

essendo

$$\phi_X(t) = e^{-4}e^{4e^t}.$$

ii)

$$\begin{aligned}
E[Z] &= 0 \\
Var[Z] &= 2Var[X] = 8 \\
\phi_Z(t) &= \phi_X(t)\phi_Y(-t) = \phi_X(t)\phi_X(-t) = e^{-8}e^{4e^t + 4e^{-t}}.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
P(X > 1, Y < 1) &= P(X > 1)P(Y < 1) \\
&= (1 - P(X = 0) - P(X = 1))P(Y = 0) \\
&= \left(1 - e^{-4} - e^{-4}4\right)e^{-4} = 1.663\,8 \times 10^{-2}.
\end{aligned}$$

iv)
$$P(XY \leq 2) = P(XY = 0) + P(XY = 1) + P(XY = 2)$$

$$\begin{aligned} P(XY = 0) &= P(X = 0) + P(Y = 0) - P(X = 0 \text{ e } Y = 0) \\ &= e^{-4} + e^{-4} - e^{-4}e^{-4} \end{aligned}$$

$$P(XY = 1) = P(X = 1 \text{ e } Y = 1) = e^{-4}4e^{-4}4$$

$$\begin{aligned} P(XY = 2) &= P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) \\ &= e^{-4}4 \cdot e^{-4}\frac{4^2}{2} + e^{-4}\frac{4^2}{2} \cdot e^{-4}4 \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} P(XY \leq 2) &= e^{-4} + e^{-4} - e^{-4}e^{-4} + \left(e^{-4}4\right)^2 + 2e^{-4}4 \cdot e^{-4}\frac{4^2}{2} \\ &= 2e^{-4} + 79e^{-8} = 6.3133 \times 10^{-2}. \end{aligned}$$

v)

$$E\left[\frac{X+Y}{W+1}\right] = 8E\left[\frac{1}{W+1}\right] = 8\left(\frac{1}{2}p + (1-p)\right) = -4p + 8.$$

Esercizio 2. i)
$$\frac{0.4q_{0.95}}{\sqrt{n}} \leq 0.1$$
$$n \geq \left(\frac{0.4 \cdot 1.64}{0.1}\right)^2 = 43.034$$
quindi 44 salti sono sufficienti.

ii) Al 90%
$$\mu = \frac{107}{20} \pm \frac{0.4q_{0.95}}{\sqrt{20}} = 5.35 \pm 0.147$$
mentre al 95%
$$\mu = \frac{107}{20} \pm \frac{0.4q_{0.975}}{\sqrt{20}} = 5.35 \pm 0.175.$$

iii) Se usiamo come vero il valor medio sperimentale $\frac{107}{20}$ troviamo

$$P(L > 4) = 1 - \Phi\left(\frac{4 - \frac{107}{20}}{0.4}\right) = 1 - \Phi(-3.375) = 0.9996.$$

Altrimenti si può usare il fatto che al 90%

$$5.203 \leq \mu \leq 5.49$$

quindi al 90%

$$1-\Phi\left(\frac{4-5.203}{0.4}\right)\leq P\left(L>4\right)\leq 1-\Phi\left(\frac{4-5.49}{0.4}\right)$$

da cui

$$0.9987\leq P\left(L>4\right)\leq 0.9999.$$

Al 95% è analogo.

iv) Cerchiamo il numero λ tale

$$P\left(L>\lambda\right)=0.8$$

ovvero $1-\Phi\left(\frac{\lambda-5.35}{0.4}\right)=0.8$, $\Phi\left(\frac{\lambda-5.35}{0.4}\right)=0.2$, $\frac{\lambda-5.35}{0.4}=q_{0.2}$, $\lambda=5.35+0.4\cdot q_{0.2}$, $\lambda=5.35-0.4\cdot q_{0.8}$, $q_{0.8}=0.841$, $\lambda=5.01$.

v) Eseguiamo un test prendendo come media dell'ipotesi nulla il valore precedente 5.35 e come nuova media sperimentale il valore $\frac{101}{20}=5.05$. Vale

$$z=\frac{5.05-5.35}{0.4}\sqrt{20}=-3.3541$$

il cui valore assoluto supera sia $q_{0.95}$ sia $q_{0.975}$, quindi l'allenatore deve ritenere che ci sia stato un peggioramento fisico.