Metodi Matematici e Statistici 2004/2005

C.d.L. in Ing. Gestionale

Prova scritta – 26/1/2006

Esercizio 1. Aldo, Giovanni e Giacomo sono i tre addetti della nostra impresa di riparazioni. Lo scorso anno Aldo si è occupato del 30% delle chiamate, Giovanni del 40% e Giacomo del restante 30%. Possiamo assumere che anche nell'anno in corso queste percentuali non siano cambiate. Ciascuno dei tre ha una diversa probabilità di riuscita: Giovanni, che è il migliore dei tre, ogni volta che è inviato a compiere una riparazione riesce nel 70% dei casi. Poi viene Aldo che riesce a portare a buon fine una riparazione nel 50% dei casi. Il peggiore è Giacomo, che assunto da poco, l'80% delle volte che esce a fare un intervento, ritorna senza aver potuto porre rimedio al guasto.

i) Calcolare la probabilità che la prossima chiamata venga portata a termine con successo (ovvero che l'operaio mandato a risolvere il problema, ci riesca davvero).

ii) Ci hanno appena chiamato protestando per un addetto che non è riuscito a risolvere l'inconveniente che era stato inviato a gestire. Calcolare le probabilità che si tratti di Aldo o di Giovanni o di Giacomo.

iii) Supponiamo di sapere che uno dei nostri operai non è riuscito a compiere due riparazioni (i cui esiti possiamo supporre indipendenti), calcolare la probabilità che si tratti di Aldo.

Supponiamo che, ogni volta che un operaio riesce in una riparazione, venga premiato con 50 euro. Inoltre sappiamo che il mese scorso sono state effettuate in totale dai tre addetti 100 chiamate.

iv) Stimare la probabilità che Giovanni abbia guadagnato più di 2000 euro il mese scorso.

v) Qual'è la probabilità che dopo tre chiamate, Aldo abbia effettuato almeno una riparazione con successo, mentre Giovanni e Giacomo nessuna?

Esercizio 2. Sia X una v.a. $N(0,4)$. Sia Y una v.a. discreta che assume valore -1 se $X < -2$, 0 se $X \in [-2,2]$, 1 se $X > 2$.

1) Trovare la media di Y, possibilmente senza calcolare la distribuzione di Y.

2) Trovare la varianza di Y.

3) Calcolare $E\left[3X + X^2 - 2Y + Y^2\right]$.

4) Calcolare $P\left(XY > 3\right)$.

Esercizio 3. Un ufficio di controllo del mercato immobiliare deve valutare il costo al metro quadro degli alloggi di una certa zona della città.

1) Vuole valutare il costo medio. Indaga sul prezzo di 20 alloggi e scopre una media campionaria $\overline{x} = 2115$ con deviazione $S = 176$. Al 90%, che valori può assumere il costo medio μ? Come può raddoppiare la precisione della stima?

2) Un'agenzia interrogata, sostiene di vendere a 2000 al metro quadro. Sulla base dell'indagine del punto 1, l'ufficio può ritenere che l'agenzia dichiari il falso, al 95%?

3) Presi per buoni i valori del punto 1, che percentuale di alloggi ci si deve aspettare che abbia un costo al metro quadro superiore a 2300?

Soluzione esercizio 1. A = va Aldo, Gv = va Giovanni, Gc = va Giacomo, S = l'intervento ha avuto successo.

i)

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|A)P(A) + P(S|Gv)P(Gv) + P(S|Gc)P(Gc) \\ &= 0.5 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.3 = 0.49. \end{aligned}$$

$$P\left(Gv, S\right) = P(S|Gv)P(Gv) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28.$$

ii)

$$P(A|S^c) = \frac{P(S^c|A)P(A)}{P(S^c)} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{1 - 0.49} = 0.294\,12$$

$$P(Gv|S^c) = \frac{P(S^c|Gv)P(Gv)}{P(S^c)} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{1 - 0.49} = 0.235\,29$$

$$P(Gc|S^c) = 1 - 0.157\,73 - 0.126\,18 = 0.470\,59.$$

iii) Posto S_2 = i due interventi non hanno avuto successo

$$P(A|S_2^c) = \frac{P(S_2^c|A)P(A)}{P(S_2^c)} = \frac{0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.3}{P(S_2^c)}$$

$$\begin{aligned} P(S_2^c) &= P(S_2^c|A)P(A) + P(S_2^c|Gv)P(Gv) + P(S_2^c|Gc)P(Gc) \\ &= 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.303 \end{aligned}$$

$$P(A|S_2^c) = \frac{0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.3}{0.303} = 0.247\,52.$$

iv) Per ciascuna chiamata i ($i = 1, ..., 100$) introduciamo una v.a. X_i che vale 1 se è andato Giovanni ed ha avuto successo, 0 altrimenti. Sia $p = 0.28$ la probabilità che $X_i = 1$ (domanda 1). Il numero di chiamate realizzate con successo da Giovanni è $X_1 + ... + X_{100}$ che è una binomiale $B(100, p)$. Pertanto la probabilità che Giovanni abbia guadagnato più di 2000 euro, essendo pari alla probabilità che abbia portato a termine con successo più di 40 chiamate, vale

$$P\left(X_1 + ... + X_{100} > 40\right) = 1 - \sum_{k=0}^{40} \binom{100}{k} p^k \left(1-p\right)^{100-k}.$$

Usiamo però l'approssimazione gaussiana:

$$\begin{aligned} & P\left(X_1 + ... + X_{100} > 40\right) \\ &= P\left(\frac{X_1 + ... + X_{100} - 100 \cdot p}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{100}} > \frac{40 - 100 \cdot p}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{100}}\right) \\ &\sim P\left(Z > 2.672\,6\right) = 1 - \Phi\left(2.672\,6\right) = 1 - 0.9962 = 0.00\,38 \end{aligned}$$

dove Z è una gaussiana canonica.

Soluzione esercizio 2.

i) Essendo

$$P(Y=-1)=P(X<-2)=P(X>2)=P(Y=1)$$

risulta

$$\begin{aligned}E[Y]&=-1\cdot P(Y=-1)+0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)\\&=-1\cdot P(Y=1)+1\cdot P(Y=1)=0.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}Var[Y]=E\left[Y^2\right]&=1\cdot P(Y=-1)+0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)\\&=2\cdot P(Y=1)=2\cdot P(X>2)=2\left(1-\Phi\left(\frac{2}{2}\right)\right)\\&=2(1-\Phi(1))=2(1-0.8413)=0.3174.\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}E\left[3X+X^2-2Y+Y^2\right]&=3E[X]+E\left[X^2\right]-2E[Y]+E\left[Y^2\right]\\&=3\cdot 0+4-2\cdot 0+0.3174=4.3174.\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}P(XY>3)&=P(XY>3,X<-2)\\&+P(XY>3,X\in[-2,2])\\&+P(XY>3,X>2)\\&=P(-X>3,X<-2)+P(X>3,X>2)\\&=P(X<-3)+P(X>3)=2\left(1-\Phi\left(\frac{3}{2}\right)\right)\\&=2(1-0.9332)=0.1336.\end{aligned}$$

Analogamente $P(XY>2)=2\left(1-\Phi\left(\frac{2}{2}\right)\right)=0.3174$.

Soluzione esercizio 3.

i) Al 90%

$$\mu=2115\pm\frac{176\cdot q_{0.95}}{\sqrt{20}}=2115\pm 64.542.$$

essendo $q_{0.95}=1.64$. Per raddoppiare la precisione della stima deve raccogliere il quadruplo dei campioni, ovvero 80 valori.

ii) Eseguiamo un test per la media. La significatività è $\alpha=0.05$, quindi serve $q_{0.975}=1.96$. Inoltre

$$z=\frac{2115-2000}{176}\sqrt{20}=2.9221.$$

Essendo $Z > q_{0.975}$, rifiutiamo l'ipotesi nulla (che la media vera sia 2000). Riteniamo che l'agenzia dichiari il falso.

iii)

$$P(C > 2300) = 1 - \Phi\left(\frac{2300 - 2115}{176}\right) = 1 - \Phi(1.0511)$$
$$= 1 - 0.8531 = 0.1469.$$