Metodi Matematici e Statistici
Prova scritta – 27/1/2009

Le domande valgono 3 punti ciascuna.

1. Data Z v.a. gaussiana $N(0,1)$, trovare un numero t tale che $P(Z > t) = 0.1$.

2. Data S v.a. binomiale $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$, trovare tutti i numeri interi n per cui risulta $P(X \leq n) > 0.95$.

3. Date due v.a. T ed S indipendenti, T esponenziale di media 5, S binomiale $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$, calcolare $E\left[3TS + T^2S^2\right]$.

4. Sia X una v.a. discreta tale che $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.6$, $P(X = 3) = 0.2$. Calcolare $E\left[(X - E[X])^3\right]$.

5. Se X, Y sono Bernoulli indipendenti, di parametri 0.1 e 0.3, calcolare $E\left[e^{Y-X}\right]$.

6. Se $T_1 \sim \mathcal{P}(4)$ e $T_2 \sim B\left(1, \frac{1}{5}\right)$ sono indipendenti, calcolare $P(T_1 + T_2 = 3)$.

7. Giochiamo a carte con un amico esperto, che ogni 10 partite ne vince 6, in media. Che probabilità c'è che dopo 50 partite ne abbia vinte al massimo 25?

8. Il 20% della popolazione trascorre molto tempo a contatto con molta gente, il 60% un discreto tempo, il 20% pochissimo tempo. Nella prima categoria, la probabilità di prendere l'influenza è il 50%, nella seconda è il 30%, nella terza è il 5%. Se una persona si reca dal dottore con l'influenza, il dottore a quale categoria penserà primariamente che appartenga? Come mai il risultato non è strano?

9. Un panettiere è convinto che il numero medio di forme di un certo tipo di pane richieste il sabato mattina sia 50. Sa che la deviazione standard è pari a 7. Decide di produrne 60 ogni sabato. Supponendo per semplicità di usare le gaussiane per descrivere le richieste di quel pane, che probabilità ha di scontentare la clientela? E se volesse usare le Poisson, che somma dovrebbe calcolare (non effettuare il calcolo numerico)? L'uso delle Poisson è ragionevole?

10. Non più convinto delle proprie previsioni, per 12 settimane si annota quante forme gli vengono richieste. I valori numerici delle forme richieste sono:

$$52, 44, 65, 54, 46, 51, 42, 39, 53, 61, 57, 53.$$

Accettando che la deviazione standard sia 7, può ancora ritenere valida la stima della media pari a 50? Più precisamente, per quali valori della significatività α può ritenere che sia ancora valida?

1 Soluzioni

1.

$$0.1 = P(X > t) = 1 - \Phi(t)$$
$$\Phi(t) = 0.9, \quad t = q_{0.9} = 1.281.$$

2. $P(X \leq n) > 0.95$ se e solo se $P(X > n) < 0.05$ se e solo se

$$\sum_{k=n+1}^{4} \binom{4}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{4-k}} < 0.05.$$

Procediamo per tentativi: per $n = 3$ vale

$$\sum_{k=4}^{4} \binom{4}{k} \frac{1}{2^4} = \binom{4}{4} \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^4} = 0.0625.$$

Non va bene. Quindi $n = 4$ (tutti gli $n \geq 4$) è il primo che va bene (vale $P(X \leq 4) = 1$).

3. Il parametro dell'esponenziale è $\lambda = \frac{1}{E[T]} = \frac{1}{5}$. Quindi

$$\begin{aligned} E\left[3TS + T^2S^2\right] &= 3E[T]\,E[S] + E\left[T^2\right]E\left[S^2\right] \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 5 + \left(Var[T] + E[T]^2\right)\left(Var[S] + E[S]^2\right) \\ &= 75 + \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{25}\right)\left(\frac{10}{4} + 25\right) = 77.2. \end{aligned}$$

4. Vale $E[X] = 2$; $X - E[X] = -1$ con probabilità 0.2, $= 0$ con probabilità 0.6, $= 1$ con probabilità 0.2; $(X - E[X])^3 = -1$ con probabilità 0.2, $= 0$ con probabilità 0.6, $= 1$ con probabilità 0.2; quindi $E\left[(X - E[X])^3\right] = 0$.

5. $E\left[e^{Y-X}\right] = E\left[e^Y\right]E\left[e^{-X}\right] = \phi_Y(1)\,\phi_X(-1)$. Inoltre $\phi_X(t) = \left[e^t p + (1-p)\right]_{p=0.1}$, $\phi_Y(t) = \left[e^t p + (1-p)\right]_{p=0.3}$. Quindi

$$E\left[e^{Y-X}\right] = 1.515 \cdot 0.937 = 1.4196.$$

6.

$$\begin{aligned} P\left(T_1+T_2=3\right) &= P\left(T_1+T_2=3|T_2=0\right)P\left(T_2=0\right) \\ &+ P\left(T_1+T_2=3|T_2=1\right)P\left(T_2=1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= P\left(T_1=3\right)P\left(T_2=0\right)+P\left(T_1+1=3\right)P\left(T_2=1\right) \\ &= e^{-4}\frac{4^3}{3!}\frac{4}{5}+e^{-4}\frac{4^2}{2!}\frac{1}{5}=0.186. \end{aligned}$$

7. Indichiamo con $X_1,...,X_{50}$ gli esiti delle 50 partite, esiti pari ad 1 se vince il nostro amico, 0 altrimenti. Il suo numero di vittorie è $S = X_1+...+X_{50}$, e questa è una binomiale. La probabilità che sia $X_k=1$ è $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. Dobbiamo calcolare $P\left(S\le 25\right)$. Vale

$$\begin{aligned} P\left(S\le 25\right) &= P\left(\frac{X_1+...+X_{50}-50\cdot\frac{3}{5}}{\sqrt{50}\sqrt{\frac{3}{5}\frac{2}{5}}}\le\frac{25-50\cdot\frac{3}{5}}{\sqrt{50}\sqrt{\frac{3}{5}\frac{2}{5}}}\right) \\ &\sim \Phi\left(\frac{25-50\cdot\frac{3}{5}}{\sqrt{50}\sqrt{\frac{3}{5}\frac{2}{5}}}\right)=\Phi\left(-1.443\right)=0.0745. \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il TLC.

8. Chiamiamo A,B,C le tre categorie e chiamiamo I l'evento: la generica persona prende l'influenza. Le ipotesi si traducono:

$$\begin{aligned} P\left(A\right)=0.2,\quad P\left(B\right)=0.6,\quad P\left(C\right)=0.2 \\ P\left(I|A\right)=0.5,\quad P\left(I|B\right)=0.3,\quad P\left(I|C\right)=0.05. \end{aligned}$$

Vale pertanto

$$P\left(I\right)=0.5\cdot 0.2+0.3\cdot 0.6+0.05\cdot 0.2=0.29.$$

Quindi, per la formula di Bayes,

$$\begin{aligned} P\left(A|I\right) &= \frac{P\left(I|A\right)P\left(A\right)}{P\left(I\right)}=\frac{0.5\cdot 0.2}{0.29} \\ P\left(B|I\right) &= \frac{0.3\cdot 0.6}{0.29},\quad P\left(C|I\right)=\frac{0.05\cdot 0.2}{0.29} \end{aligned}$$

e vale $0.5\cdot 0.2=0.1$, $0.3\cdot 0.6=0.18$, $0.05\cdot 0.2=0.01$, quindi è più probabile che una persona influenzata sia di categoria B.

9. Detto N il numero di richieste, dobbiamo calcolare $P(N > 60)$, sapendo che N è una $N(50, 7^2)$. Vale

$$P(N > 60) = 1 - \Phi\left(\frac{60 - 50}{7}\right) = 1 - \Phi(1.429) = 1 - 0.923 = 0.076.$$

Volendo usare le Poisson, dovremmo avere $\lambda = 50$, che è abbastanza coerente col fatto che anche la varianza (pari a 49) è λ. Dobbiamo calcolare

$$\sum_{k=61}^{\infty} e^{-50} \frac{50^k}{k!}.$$

10. Eseguiamo un test per la media. La media del campione è 51.4 circa. Quindi $z = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{1.4}{7} \sqrt{12} = 0.693$. Il valore p è

$$p = 2 - 2\Phi(0.693) = 2 - 2 \cdot 0.755 = 0.49.$$

E' un pessimo valore p dal punto di vista del rifiuto, quindi non rifiutiamo l'ipotesi che la media sia 50. Comunque, la rifiuteremmo per tutti gli $\alpha > 0.49$.