Metodi Matematici e Statistici

Prova scritta – 11/1/2008

Esercizio 1.

i) Data una v.a. $X \sim N(21,9)$, calcolare media, varianza e funzione generatrice della v.a. $5X-2$.

ii) Data una seconda v.a. Y, distribuita come X, ma indipendente da X, calcolare $E[X^2 e^Y]$.

iii) Calcolare $P(X+Y > 40)$.

iv) Calcolare $P(|X-18| < 1)$.

v) Se $X_1,...,X_{10}$ è un campione estratto da X, come calcolereste approssimativamente $P(X_1^2+...+X_{10}^2 < 200)$? Cosa bisogna conoscere?

Esercizio 2. Data una v.a. $X \sim N(\mu,9)$, con μ incognita, vorremmo stimare μ tramite un campione $x_1,...,x_n$.

i) Lavoriamo a livello di confidenza 95%. Che valori di n vanno bene se vogliamo $|\mu-\bar{x}| < 0.5$?

ii) Supponete di non sapere nemmeno che la varianza sia 9 e d'altra parte supponete di voler scoprire che valori di n vanno bene per avere $\left|\frac{\mu-\bar{x}}{\mu}\right| < 0.1$. Come procedereste sperimentalmente?

iii) Torniamo all'ipotesi $X \sim N(\mu,9)$. Supponiamo di essere un laboratorio in concorrenza con un altro, per la stima di μ. Supponiamo che l'altro laboratorio arrivi prima di noi a dichiarare che μ vale 25.

Noi abbiamo fino a quel momento svolto solo 10 esperimenti e da essi abbiamo trovato il valore $\bar{x} = 20$. Noi siamo assolutamente sicuri dei nostri esperimenti. Possiamo già comunicare che l'altro laboratorio ha effettuato esperimenti sbagliati o comuque ha dato un'informazione falsa circa μ?

vi) La domanda precedente va risolta al 95%. Fino a che livelli α di significatività si potrebbe dichiarare che l'altro laboratorio ha dato un'informazione falsa circa μ?

Soluzioni

Esercizio 1. i)

$$E[5X-2] = 5 \bullet 21 - 2 = 103$$
$$Var[5X-2] = 25 \bullet 9 = 225$$
$$\phi_{5X-2}(t) = e^{-2t}\phi_X(5t) = e^{-2t}e^{21(5t)+\frac{9(5t)^2}{2}} = e^{103t+\frac{225t^2}{2}}.$$

ii)

$$E[X^2e^Y] = E[X^2]E[e^Y] = \left(Var[X]+E[X]^2\right)\phi_X(1)$$
$$= (9+21^2)e^{21+\frac{9}{2}} = 5.3422 \times 10^{13}.$$

iii) La v.a. $X+Y$ è $N(42,18)$, quindi

$$P(X+Y>40) = 1-\Phi\left(\frac{40-42}{\sqrt{18}}\right) = \Phi(0.47) = ...$$

iv)

$$P(|X-18|<1) = P(17<X<19)$$
$$= \Phi\left(\frac{19-21}{3}\right) - \Phi\left(\frac{17-21}{3}\right) = ...$$

v)

$$P(X_1^2+...+X_{10}^2<200) = P\left(\frac{X_1^2+...+X_{10}^2-10\mu}{\sqrt{10}\,\sigma} < \frac{200-10\mu}{\sqrt{10}\,\sigma}\right)$$

dove

$$\mu = E[X_1^2] = Var[X]+E[X]^2 = 9+21^2$$
$$\sigma^2 = Var[X_1^2] = E[X_1^4]-\mu^2.$$

Il problema è il calcolo di $E[X_1^4]$: svolgendo quattro derivate della generatrice, si può calcolare.

Esercizio 2. i) A livello di confidenza 95%

$$|\mu-\bar{x}| \leq \frac{3 \bullet 1.96}{\sqrt{n}}$$

quindi vogliamo $\frac{3 \bullet 1.96}{\sqrt{n}} \leq 0.5$, da cui si trova

$$n \geq \frac{9 \bullet 1.96^2}{0.5^2} = 138.3$$

per cui $n = 139$ è sufficiente.

ii) Si effettua una prima fase di pochi esperimenti con cui si stimano μ e σ in modo grossolano, ottenendo dei valori $\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$. Poi si imposta la disuguaglianza

$$\frac{\frac{\hat{\sigma}1.96}{\sqrt{n}}}{\hat{\mu}} < 0.1$$

da cui si trova n.

iii) Basta svolgere il test confrontando il valore assoluto di

$$z = \frac{20 - 25}{3}\sqrt{10}$$

con 1.96.

iv) Si tratta di calcolare il valore $p = 2 - 2\Phi(|z|)$.