Metodi Matematici e Statistici 2004/2005
C.d.L. in Ing. Gestionale
Prova scritta – 9/2/2006

Esercizio 1.

La nostra industria produce lo stesso prodotto XXX in tre diversi stabilimenti, situati ad Adria, Bari e a Cosenza. I tre stabilimenti hanno procedure di controllo della qualità diverse e da statistiche raccolte negli anni precedenti risulta che il 40% dei pezzi prodotti ad Adria sono difettosi, a Bari la frazione di pezzi difettosi è del 15%, mentre a Cosenza è solo del 2%. Quest'anno il 30% dei pezzi prodotti usciranno dallo stabilimento di Adria, il 20% da quello di Cosenza e la parte restante da quello di Bari.

i) Cacolare la percentuale di pezzi difettosi che ci si aspetta nella produzione di quest'anno.

ii) Un cliente manda indietro un pezzo difettoso: calcolare con quale probabilità viene dallo stabilimento di Adria, da quello di Bari o da quello di Cosenza.

iii) Qual'è la probabilità che due pezzi qualsiasi siano entrambe difettosi? (Si supponga che i pezzi prodotti in ciascun stabilimento siano indipendenti, per quanto riguarda la difettosità).

Supponiamo che ogni pezzo in buono stato faccia guadagnare all'azienda 100 euro e che ogni pezzo difettoso invece risulti in un guadagno di soli 20 euro. Inoltre supponiamo di vendere 100 pezzi.

iv) Stimare con quale probabilità la vendita di 100 pezzi fa guadagnare all'azienda più di 8000 euro.

v) Sapendo che ogni pezzo costa all'azienda 80 euro, stimare quanti pezzi si devono vendere per avere una confidenza del 90% di ricavarne più di 1000 euro.

Esercizio 2.

Siano X ed Y due v.a. indipendenti, discrete, che assumono valori -1, 0 ed 1 con ugual probabilità.

i) Trovare media, varianza e generatrice di X.

ii) Calcolare $E\left[(2X-3Y)^2\right]$.

iii) Calcolare $E\left[\frac{1}{1+Y^2}\right]$.

iv) Calcolare $E\left[\frac{X}{1+Y^2}\right]$.

Esercizio 3.

Viene dato il compito, ad un laboratorio universitario, di testare la durata di un nuovo congegno meccanico sottoposto al massimo stress. Supponiamo che la durata T sia una v.a. gaussiana $N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

i) Il laboratorio esamina 30 esemplari e rileva una durata media (campionaria) $\overline{T} = 46$ con deviazione $S = 15$. Supponiamo per semplicità di supporre che sia $\sigma = 15$. Che dichiarazione farà il laboratorio circa la durata media vera, al 95%?

ii) Supponiamo che interessi un valore $\mu_{\min}^{95\%}$ tale che $\mu > \mu_{\min}^{95\%}$ al 95% (desideriamo sapere che la durata media è almeno $\mu_{\min}^{95\%}$, con confidenza 0.95). Che valore si può prendere di $\mu_{\min}^{95\%}$?

iii) Preso per semplicità $\mu = 46$, come calcoliamo un valore $\tau_{\min}^{95\%}$ tale che $T > \tau_{\min}^{95\%}$ al 95% (desideriamo sapere che il 95% degli esemplari avrà una durata pari almeno a $\tau_{\min}^{95\%}$)?

iv) L'azienda che ha commissionato le prove di laboratorio sostiene che la durata media è pari a 53. Al 95%, il laboratorio può dichiarare che questa opinione è falsa? Calcolare anche il valore p (il p dei dati).

1 Cenni sulle soluzioni

1.i. $P(D|A) = 0.4$, $P(D|B) = 0.15$, $P(D|C) = 0.02$, $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.2$,

$$P(D) = P(D|A)\,P(A) + ... = 0.4 \cdot 0.3 + 0.15 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.2 = 0.199.$$

1.ii.

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)\,P(A)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.199} = 0.603\,02$$

$$P(B|D) = \frac{P(D|B)\,P(B)}{P(D)} = \frac{0.15 \cdot 0.5}{0.199} = 0.376\,88$$

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)\,P(C)}{P(D)} = \frac{0.02 \cdot 0.2}{0.199} == 2.\,010\,1 \times 10^{-2}.$$

2.i. $E[X] = 0$, $E\left[X^2\right] = \frac{2}{3}$, $Var[X] = \frac{2}{3}$, $\phi(t) = \frac{1+e^t+e^{-t}}{3}$.
2.ii.

$$E\left[(2X-3Y)^2\right] = E\left[4X^2 + 9Y^2 - 12XY\right]$$
$$= 4\frac{2}{3} + 9\frac{2}{3} - 12 \cdot 0 \cdot 0 = \frac{43}{3} = 14.\,333.$$

2.iii. $\frac{1}{1+Y^2} = \frac{1}{2}$ con prob. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{1+Y^2} = 1$ con prob. $\frac{1}{3}$, quindi

$$E\left[\frac{1}{1+Y^2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

2.iv. Si può usare l'indipendenza e concludere subito. In modo più generale, $\frac{X}{1+Y^2}$ vale:

- $\frac{1}{2}$ se $X = 1$, $Y = \pm 1$, quindi con prob. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$;
- $-\frac{1}{2}$ se $X = -1$, $Y = \pm 1$, quindi con prob. $\frac{2}{9}$;
- 1 se $X = 1$, $Y = 0$, quindi con prob. $\frac{1}{9}$;
- -1 se $X = -1$, $Y = 0$, quindi con prob. $\frac{1}{9}$;
- 0 se $X = 0$, quindi con prob. $\frac{1}{3}$.

Si noti che la somma delle probabilità è uno. Vale allora

$$E\left[\frac{X}{1+Y^2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} - 1 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

3.i. $\mu = 46 \pm \delta$ con

$$\delta = \frac{15 \cdot 1.96}{\sqrt{30}} = 5.\,367\,7.$$

3.ii. $\mu_{\min}^{95\%} = 46 - \delta$ con

$$\delta = q_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15 \cdot 1.64}{\sqrt{30}} = 4.\,491\,3.$$

Quindi $\mu_{\min}^{95\%} = 41.\,509$.

3.iii.
$$\tau_{\min}^{95\%} = 46 - q_{0.95}\sigma = 46 - 15 \cdot 1.64 = 21.4.$$

3.iv. Eseguiamo un test bilaterale (anche l'unilaterale sarebbe ragionevole) con $\alpha = 0.05$, $\mu_0 = 60$: $q_{0.975} = 1.96$,
$$z = \frac{\overline{T} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{46 - 60}{15}\sqrt{30} = -2.556$$
quindi, essendo $|z| > q_{0.975}$, il test è significativo (il laboratorio dichiara che l'opinione dell'azienda è falsa). Il valore p è
$$p = 2 - 2\Phi\left(|z|\right) = 2 - 2 \cdot 0.9946 = .0108.$$
Naturalmente avremmo potuto (ed era più economico) calcolare prima il valore p, poi confrontare α con p: siccome nel nostro caso risulta $\alpha > p$, il test è significativo.