Metodi Matematici e Statistici

Prova scritta – 26/6/2007

Esercizio 1. Un operatore finanziario osserva il prezzo X di un titolo. Se $X < a$ (il valore di a verrà discusso più avanti), l'operatore ne compra 100 unità. Se invece $X \geq a$, decide un po' a caso e ne compra 100 unità il 30% delle volte, mentre nel restante 70% delle volte non compra niente.

i) Supponiamo $X \sim N(5,2)$, $a = 3$. Calcolare la probabilità che l'operatore compri 100 unità del titolo.

ii) Un collega che non ha accesso al valore del titolo (non conosce cioè il valore di X), ma comunque sa che $X \sim N(5,2)$, $a = 3$, vede che l'operatore compra 100 unità. Ritiene più probabile che sia $X < a$ oppure $X \geq a$?

iii) L'operatore vuole ora ricalibrare la soglia a in modo che la probabilità di comprare 100 unità valga $\frac{1}{2}$. Trovare a.

iv) Sempre col vecchio valore di a, supponiamo che l'operatore osservi il titolo per 50 volte a sufficiente distanza di tempo da poter assumere che i valori $X_1, \ldots, X_{50}$ del titolo siano indipendenti. Ciascuna delle 50 volte agisce come spiegato sopra. Che probabilità c'è che alla fine abbia comprato più di 2000 unità del titolo?

v) Calcolare $E[X_1^2 \bullet X_2^2 \bullet \bullet \bullet X_{50}^2]$ e $E[e^{7(X_1+X_2+\ldots+X_{50})}]$.

vi) Calcolare $P(|X-1| < 2)$.

vii) Facciamo un passo indietro e supponiamo che l'operatore non conosca il valor medio di X, ma sappia solo che $X \sim N(\mu,2)$. Con che precisione può conoscere μ sulla base delle 50 osservazioni del punto iv), al 95%?

viii) Se vuole una precisione pari a 0.3, di che confidenza deve accontentarsi? E se invece vuole una precisione pari a 0.3 ed una confidenza del 95%, che deve fare?

ix) Supponiamo che, al 95%, abbia stimato μ, come al punto vii), avendo osservato un campione avente media aritmetica $\bar{x} = 4.5$. Rispondere ora alla domanda i).

x) L'operatore aveva anche letto su una rivista specializzata che la media di X era 5.5. Dopo le sue osservazioni, al 95% cosa pensa l'operatore dell'affidabilità della rivista?

Soluzione

i) Con ovvie notazioni,

$$P(100) = P(100|X < a)P(X < a) + P(100|X \geq a)P(X \geq a)$$
$$= P(X < a) + 0.3 \bullet P(X \geq a) = 0.3 + 0.7 \bullet P(X < a).$$

Inoltre,

$$P(X < a) = \Phi\left(\frac{a-5}{\sqrt{2}}\right) = \Phi(-1.4142) = 0.07865$$

quindi $P(100) = 0.35506$.

ii)

$$P(X < a|100) = \frac{P(100|X < a)P(X < a)}{P(100)} = \frac{0.07865}{0.35506} = 0.22151$$

quindi è più probabile che sia $X \geq a$.

iii) Al punto i) abbiamo trovato

$$P(100) = 0.3 + 0.7 \bullet P(X < a)$$

e questa deve valere 0.5. Quindi

$$P(X < a) = \frac{0.2}{0.7} = 0.28571$$

ovvero, come si vede da un disegno della gaussiana o con facili conti,

$$a = \mu - \sigma q_{1-0.28571} \sim 5 - \sqrt{2} \bullet 0.56 = 4.208.$$

iv) Introduciamo le v.a. $Y_1, ..., Y_{50}$ indipendenti $B(1, 0.355)$ e la v.a. $Y_1 + ... + Y_{50}$ che descrive il numero di volte in cui l'operatore acquista. Detta $p = 0.355$, dobbiamo calcolare

$$P(Y_1 + ... + Y_{50} \geq 20)$$
$$= P\left(\frac{Y_1 + ... + Y_{50} - 50p}{\sqrt{50}\sqrt{p(1-p)}} \geq \frac{20 - 50p}{\sqrt{50}\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

dove poi si applica il TLC.

v)

$$E[X_1^2 \bullet X_2^2 \bullet \bullet \bullet X_{50}^2] = E[X_1^2]^{50} = \left(Var[X_1] + E[X_1]^2\right)^{50} = ...$$

$$E[e^{7(X_1+X_2+...+X_{50})}] = E[e^{7X_1}] \bullet ... \bullet E[e^{7X_{50}}] = E[e^{7X_1}]^{50}$$

dove poi $E[e^{7X_1}]$ si calcola usando la generatrice della gaussiana.

vi)

$$P(|X-1|<2) = P(-2 < X-1 < 2) = P(-1 < X < 3)$$
$$= \Phi\left(\frac{3-5}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-1-5}{\sqrt{2}}\right) = \ldots$$

vii) Basta usare la solita formula $\delta = \frac{\sqrt{2}\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{50}}$.

viii) Nella prima parte si deve cercare il numero α tale che

$$0.3 = \frac{\sqrt{2}\, q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{50}}.$$

Vale $q_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{0.3\bullet\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = 1.5$, da cui $1-\frac{\alpha}{2} = \Phi(1.5) = 0.9332$, da cui si trova α ed infine la confidenza $1-\alpha = 87\%$.

La seconda parte è standard, si trova $n = 86$.

ix) Al livello di confidenza fissato, μ sta nell'intervallo $[4.108, 4.892]$, quindi si devono ricalcolare le probabilità del punto i) per entrambi questi valori della media ed affermare che la probabilità richiesta (di comprare) sta nell'intervallo trovato, che è $[0.36, 0.45]$.

x) Basta effettuare il test con $z = \frac{4.5-5.5}{\sqrt{2}}\sqrt{50}$. Il test risulta significativo, la rivista non è affidabile.