Metodi Matematici e Statistici
Modulo di Statistica
Ing. Gestionale, scritto del 18/2/04.

Esercizio 1. Luisa, correntista della banca BFN, chiede un prestito alla banca. La BFN impiega un tempo aleatorio prima di confermare la concessione del prestito, in quanto esegue un certo numero di controlli ed operazioni. Si riscontra statisticamente che, quando un correntista ha proprietà e risorse che lo collocano in una certa categoria A, il tempo di attesa è esponenziale di media 5 giorni. Quando invece si colloca in una certa categoria B, il tempo è esponenziale di media 10 giorni.

Inoltre, il 30% dei correntisti è di categoria A (gli altri di B).

Luisa ha aspettato più di 10 giorni. Che probabilità c'è che Luisa stia nella categoria A (per un osservatore esterno che non conosca le proprietà di Luisa, ma che abbia osservato tutto quanto detto sopra)?

[Si ricordi che una v.a. T è esponenziale di parametro λ se ha densità $\lambda e^{-\lambda t}$ per $t \geq 0$; si dimostra che $E[T] = \frac{1}{\lambda}$, $Var[T] = \frac{1}{\lambda^2}$, $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$.]

Sol. Es. 1.

$$P(A|T \geq 10) = \frac{P(T \geq 10|A)\, P(A)}{P(T \geq 10)} = \frac{e^{-\frac{1}{5}10} 0.3}{P(T \geq 10)}$$

$$\begin{aligned} P(T \geq 10) &= P(T \geq 10|A)\, P(A) + P(T \geq 10|B)\, P(B) \\ &= e^{-\frac{1}{5}10} 0.3 + e^{-\frac{1}{10}10} 0.7 = 0.298 \end{aligned}$$

quindi $P(A|T \geq 10) = 0.136$.

Esercizio 2. Un addetto al funzionamento e manutenzione di un macchinario, sostituisce immediatamente un certo fusibile ogni volta che questo si brucia. Accade statisticamente che questi fusibili durino, al lavoro in tale macchinario, per un tempo esponenziale di media 2 settimane. Dall'accensione iniziale del macchinario passa quindi un tempo esponenziale T_1, di media due settiamane, prima che si bruci quel certo fusibile; questo viene immediatamente sostituito e dopo un tempo esponenziale T_2, di media anch'esso due settiamane, indipendente da T_1, il secondo fusibile si brucia, e così via.

Sia S_n l'istante in cui si brucia l'ennesimo fusibile.

Calcolare media e varianza di S_n.

Stimare la probabilità che il cinquantesimo fusibile bruci dopo 120 settimane.

Sol. Es. 2. Vale $S_n = T_1 + T_2 + ... + T_n$, quindi per linearità

$$E[S_n] = E[T_1] + ... + E[T_n] = 2n \text{ settimane}$$

e per l'indipendenza

$$Var[S_n] = Var[T_1] + ... + Var[T_n] = 4n$$

(infatti $Var[T_i] = E[T_i]^2$ per l'esponenziale). Infine

$$\begin{aligned} P(S_{50} > 120) &= P(T_1 + T_2 + ... + T_{50} > 120) \\ &= P\left(\frac{T_1 + T_2 + ... + T_{50} - 50 \cdot 2}{\sqrt{50 \cdot 4}} > \frac{120 - 50 \cdot 2}{\sqrt{50 \cdot 4}}\right) \\ &\sim 1 - \Phi\left(\frac{120 - 50 \cdot 2}{\sqrt{50 \cdot 4}}\right) = 1 - \Phi(1.414) \\ &= 1 - .921 = .079. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Relativamente all'esercizio precedente, supponiamo che se un fusibile brucia entro il primo giorno di servizio, scatti un allarme (si ritiene che qualcos'altro sia potenzialmente danneggiato.

Che probabilità c'è che scattino 3 allarmi consecutivamente, dopo l'accensione del macchinario?

Che probabilità c'è, invece, che scatti un solo allarme su 50 fusibili bruciati?

Sol. Es. 3. La probabilità che un fusibile bruci entro il primo giorno di servizio è

$$P(T \leq 1 \text{ giorno}) = 1 - P(T > 1 \text{ giorno}) = 1 - e^{-\frac{1}{14} \cdot 1} = 0.0689.$$

La probabilità che ciò avvenga per tre volte consecutive dopo l'accensione è (per l'indipendenza)

$$P(T_1 \leq 1, T_2 \leq 1, T_3 \leq 1) = P(T_1 \leq 1)^3 = 0.0689^3 = 3.27 \times 10^{-4}.$$

Infine, indichiamo con X_i la v.a. che vale 1 se $T_i \leq 1$, quindi con probabilità 0.0689, mentre vale 0 altrimenti. Il numero di allarmi su 50 rotture è $X = X_1 + ... + X_{50}$, che è una $B(50, 0.0689)$, approssimabile per il teorema degli eventi rari ad una $P(3.445)$. In definitiva (va bene anche l'uso della binomiale) la probabilità richiesta è

$$e^{-3.445}\frac{3.445}{1} = 0.1099.$$