Metodi e Modelli Matematici di Probabilità per la Gestione

Prova scritta – 12/01/2009

Esercizio 1 (20 punti). Esaminiamo il controllo passaporti in un aeroporto in entrata per gli Stati Uniti, controllo che richiede mediamente un tempo elevato. Supponiamo che gli arrivi in coda per tale controllo siano sostanzialmente casuali e statisticamente regolari, quindi si possano considerare come un processo di Poisson. Indichiamo con τ il tempo medio tra un arrivo e l'altro. La gente deve mettersi in un'unica coda; il primo in cima alla coda viene indirizzato al primo banco di controllo che si libera.

i) In un aeroporto piccolo, supponiamo che ci sia un solo banco di controllo e che esso impieghi un tempo esponenziale a completare un controllo, di media pari a 3 minuti. Supponiamo che sia $\tau = 4$ minuti. Calcolare la probabilità di avere un numero maggiore o uguale a 10 di persone in coda.

ii) Continuiamo a supporre che ci sia un solo punto di controllo, con tempo medio di controllo per persona di 3 minuti, ma supponiamo di non sapere il valore di τ. Supponiamo invece che in una fase stazionaria della giornata il tempo medio di permanenza nell'area di controllo, per ogni singola persona, sia pari a 30 minuti. Quanto vale τ?

iii) Esaminiamo ora un aeroporto più grande. Supponiamo di conoscere il tempo medio di controllo τ_c di una persona ed il tempo medio tra un arrivo e l'altro τ_a. Supponiamo $\tau_c = 3$ minuti, $\tau_a = 20$ secondi. Quanti banchi di controllo deve aprire l'aeroporto per evitare il collasso?

iv) Supponiamo di nuovo, come al punto (i), $\tau_c = 3$ minuti, $\tau_a = 4$ minuti. Per motivi di sicurezza si vuole un numero medio di persone nell'area di controllo inferiore a 2. Mostrare che un solo banco non è sufficiente ma due sì. Nello svolgere la verifica che due banchi sono sufficienti, ricavare prima la formula generale in funzione di λ e μ.

v) Torniamo alla situazione del punto (i) con un solo banco di controllo. Supponiamo che l'addetto al controllo, appena termina di controllare l'ultima persona che ha di fronte (quindi in quell'istante non ha altre persone da controllare), si assenti per un tempo esponenziale di media 5 minuti. In nessun'altra situazione l'addetto si allontana dal banco. Descrivere il nuovo sistema con un modello markoviano (dichiarare cioè gli stati, le transizioni ed i tassi).

Al solo scopo di capire se in questa nuova situazione il sistema rag-

giunge l'equilibrio, che ragionamento non rigoroso ma intuitivamente plausibile potreste fare?

Esercizio 2 (10 punti). C'è una densità di probabilità sull'intervallo $[0,1]$ piuttosto simile alla Beta, ma con qualche caratteristica diversa che a volte può essere utile. Si chiama densità di Kumaraswamy. La sua funzione di distribuzione cumulativa $F(x)$ vale 0 per $x<0$, 1 per $x>1$ e

$$F_{a,b}(x) = 1-\left(1-x^a\right)^b \text{ per } x \in [0,1].$$

Dipende quindi anch'essa da due parametri, a e b, entrambi ≥ 0.

i) Supponiamo di trovare in rete (o di saper costruire) una funzione di `R` che calcola la cumulativa suddetta, col comando `pkumar(x,a,b)`. Non abbiamo però a disposizione la funzione `qkumar(t,a,b)` che calcola il quantile di ordine `t`, cioè quel numero $q \in (0,1)$ per cui `pkumar(q,a,b)=t`. Come fareste a calcolare `qkumar(0.95,2,3)`? Scrivere inoltre la funzione `pkumar(x,a,b)` (nel senso: scrivere la riga di codice che calcola `pkumar(x,a,b)`, dati `x,a,b`).

ii) Supponiamo di trovare in rete una funzione di `R` che genera numeri aleatori secondo tale distribuzione, col comando `rkumar(n,a,b)`. Generare 50 numeri aleatori nel caso $a=1$, $b=3$, ottenere da `R` un istogramma. Costruirsi una ragionevole funzione `dkumar(x,a,b)` e sovrappore il grafico della densità vera all'istogramma. Fare a mano un disegno molto qualitativo di ciò che ci mostrerà `R`.

[Si intende che la risposta alle domande dev'essere la descrizione di come si farebbe con `R` a svolgere quelle cose, elencando i comandi e commentando la risoluzione.]

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) Il numero di persone nel sistema si descrive con una $M/M/1$ di tassi $\lambda = \frac{1}{4}$ (il tempo verrà sempre calcolato in minuti) e $\mu = \frac{1}{3}$. Quindi $\rho = \frac{3}{4}$, $\pi_k = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k$, quindi la probabilità richiesta è

$$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \sum_{k=10}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-10} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}.$$

ii) Vale $\lambda = \frac{1}{\tau}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\rho = \frac{3}{\tau}$, quindi dobbiamo risolvere l'equazione (nell'incognita τ)

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\rho}{1-\rho} + 1\right) = 30$$

ovvero $3\left(\frac{3}{\tau-3} + 1\right) = 30$, $\frac{3}{\tau-3} = 9$, $\tau - 3 = \frac{1}{3}$,

$$\tau = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}.$$

iii) Si tratta ora di una coda $M/M/c$, con tassi $\lambda = 3$, $\mu = \frac{1}{3}$, in cui, per avere regime stazionario, deve valere $c\mu > \lambda$, ovvero

$$c > 9.$$

iv) Il regime strazionario si raggiunge anche con un solo banco, ma il numero medio di persone nel sistema è ($\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\rho = \frac{3}{4}$)

$$\frac{\rho}{1-\rho} = 3.$$

Servono quindi più banchi aperti. Il testo dice solo di verificare che due sono sufficienti, quindi calcoliamo il numero medio di utenti nel sistema nel caso di 2 serventi. Dobbiamo calcolare

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k$$

dove, nel caso di 2 serventi, vale

$$\pi_k = \frac{1}{a}\frac{\lambda^k}{k!\mu^k} \text{ per } k = 0, 1$$

$$\pi_{2+k} = \frac{1}{a}\frac{\lambda^2}{2!\mu^2}\rho^k \text{ per } k \geq 2$$

dove ora $\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$,

$$a = \frac{\lambda^0}{0!\mu^0} + \frac{\lambda^1}{1!\mu^1} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2}\frac{1}{1-\rho} = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\frac{1}{1-\rho}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k = \pi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k\pi_k &= \frac{1}{a}\frac{\lambda^1}{1!\mu^1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\,\frac{1}{a}\frac{\lambda^2}{2!\mu^2}\rho^k \\ &= \frac{1}{a}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{a}\frac{\lambda^2}{2!\mu^2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\,\rho^k.\end{aligned}$$

Ora, sappiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$, quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\,\rho^k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{2}{1-\rho}.$$

In definitiva, la formula generale per il numero medio di persone nel sistema (due serventi) è

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k = \frac{1}{a}\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{a}\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\left(\frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{2}{1-\rho}\right)$$

con ρ ed a come sopra. Sostituendo i valori $\lambda = \frac{1}{4}$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\rho = \frac{3}{8}$ si trova che due banchi sono più che sufficienti (il numero medio di persone nel sistema è 0.873).

v) Il generico stato deve dare due informazioni: il numero k di utenti nel sistema, e l'informazione se il banco sia attivo (A) o meno (B). La transizione da A a B può avvenire solo se siamo nello stato $(1, A)$.

Le transizioni possibili sono

$$\begin{aligned}(k, A) &\xrightarrow{\lambda} (k+1, A)\,, \quad k \geq 0 \\ (k, A) &\xrightarrow{\mu} (k-1, A)\,, \quad k \geq 2\end{aligned}$$

$$(1, A) \xrightarrow{\mu} (0, B)$$

$$\begin{aligned}(k, B) &\xrightarrow{\lambda} (k+1, B)\,, \quad k \geq 0 \\ (k, B) &\xrightarrow{\frac{1}{5}} (k, A)\,, \quad k \geq 0.\end{aligned}$$

Un modo intuitivo di capire se si raggiunge o meno l'equilibrio è il seguente. Quando ci sono $k \geq 2$ persone nel sistema e l'addetto è al lavoro, il sistema non collassa. Quando, trovandosi in $k = 1$, capita che l'addetto si assenti, nei 5 minuti arrivano in media $5 \cdot \lambda = \frac{5}{4}$ persone, comunque un numero distribuito secondo Poisson di parametro $\frac{5}{4}$ (non quindi quantità che possano portare al collasso mentre è via). Poi l'addetto rientra, trova un numero aleatorio ma comunque mediamente basso di persone lì n coda, ed inizia a servirle ripristinando un'usuale coda M/M/1 non esplosiva. Non esiste, in particolare, alcun fenomeno di accumulo delle persone arrivate in diverse pause (tra una pausa e l'altra bisogna che le persone nel sistema tornino a zero).

Esercizio 2. i) Dopo aver eseguito

```
X <- (1:1000)/1000
Y <- pkumar(X,2,3)
```

troviamo nel vettore `Y` dei valori tra 0 ed 1 che sono i nostri potenziali vaolri di `t`. Cerchiamo quello più vicino a 0.95 (non è difficile o ambiguo trovarlo, visto che sono in ordine crescente): esso ci fornisce un k tra 1 e 1000. Il quantile cercato è $k/1000$.

La funzione `pkumar(x,a,b)` si ottiene semplicemente da

```
pkumar(x,a,b)<-1-(1-x^a)^b
```

ii) La generazione e l'istogramma si ottengono con

```
X<-rkumar(50,1,3)
hist(X)
```

Non possedendo la funzione `dkumar(x,a,b)`, ce la dobbiamo costruire. La densità è la derivata della cumulativa. Possiamo allora agire in due modi. Uno consiste nel calcolare approssimativamente `dkumar(x,a,b)` come rapporto incrementale di `pkumar(x,a,b)`, rispetto alla variabile x. L'altro, più semplice, consiste nel derivare l'espressione analitica $F_{a,b}(x) = 1 - (1 - x^a)^b$, ottenendo $f_{a,b}(x) = ab(1 - x^a)^{b-1} x^{a-1}$ e tracciare il grafico di questa funzione. Scriviamo (ricordando che $a = 1$, $b = 3$):

```
X <- (1:1000)/1000
Y <- 3*(1-X)^2
lines(X,Y)
```

Esercizio 2 (10 punti). Si consideri la catena di Markov a tempo discreto con stati 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e probabilità di transizione

$$
\begin{array}{lllll}
p_{11} = \frac{1}{2}, & p_{12} = \frac{1}{2}, & p_{21} = \frac{1}{2}, & p_{23} = \frac{1}{4}, & p_{25} = \frac{1}{4} \\
p_{34} = \frac{1}{2}, & p_{43} = \frac{1}{2}, & p_{33} = \frac{1}{2}, & p_{44} = \frac{1}{2}, & \\
p_{58} = \frac{1}{2}, & p_{52} = \frac{1}{2}, & p_{83} = \frac{1}{2}, & p_{86} = \frac{1}{2}, & \\
p_{67} = \frac{1}{4}, & p_{66} = \frac{3}{4}, & p_{77} = \frac{1}{2}, & p_{76} = \frac{1}{2}. &
\end{array}
$$

Classificare gli stati e trovare tutte le probabilità di transizione. Calcolare la probabilità di trovarsi nello stato 3 in 4 passi, partendo dallo stato 1.