Metodi e Modelli Matematici di Probabilità per la Gestione

15 Febbraio 2007

Esercizio 1. Le importazioni di una materia prima dalla nazione N dipendono anche dai rapporti politici che intercorrono con quella nazione. Classifichiamo i rapporti in due categorie: critici, buoni. Classifichiamo la quantità di importazione in 3 categorie, A,B,C, dalla più bassa alla più alta.

Ogni fine mese viene valutato il livello di importazione di quel mese. Il livello, da un mese al successivo, passa da una categoria a quella immediatamente superiore (salvo che sia già C), solo se i rapporti sono buoni, e comunque non necessariamente: solo nel 50% dei casi in cui i rapporti sono buoni c'è un aumento di importazioni. Passa invece ad una categoria immediatamente più bassa (salvo che sia già in A) sia nel 10% delle volte in cui i rapporti sono buoni, sia nel 50% delle volte in cui sono critici.

Le statistiche dicono che i rapporti sono buoni per 10 mesi all'anno, mediamente, e critici per i restanti 2 mesi.

1) Descrivere la categoria d'importazione (ovvero A,B,C) con una catena di Markov.

2) Se nelle categorie A,B,C i guadagni sono di $x, 5x, 10x$ mila Euro rispettivamente, calcolare il guadagno medio a regime.

3) Risolvere il quesito 2 nel caso in cui le categorie di importazione siano 10, A,B,C,D,E,F,G,H,I,L, con relativi guadagni di $x, 2x, 3x, ..., 10x$ mila Euro.

Esercizio 2. In un certo aeroporto, per imbarcarsi sui voli internazionali, bisogna passare due controlli: prima il controllo bagagli, poi quello dei passaporti. Entrambi hanno la propria fila d'attesa. Al controllo bagagli arrivano in media 5 persone al minuto, con intertempi esponenziali. Anche i tempi di controllo si suppongano esponenziali.

1) Ad un certo istante, al controllo bagagli, accade quanto segue. Ci sono 7 persone in coda, viene fermato il servizio e chiamata la polizia per un accertamento, ed il servizio resta fermo per 5 minuti. Che probabilità c'è che, alla ripresa del servizio, ci siano più di 40 persone in coda? (Lasciare indicata la formula)

2) Torniamo alle condizioni normali di funzionamento. Il controllo bagagli avviene per mezzo di vari punti di passaggio paralleli. Se ciascuno è in grado di controllare in media tre persone al minuto, quanti passaggi devono essere

aperti? (Giustificare rigorosamente la risposta). Tale numero (minimo) è sufficiente per avere un numero medio di persone in coda inferiore a 4?

3) Nelle condizioni del punto 2, supponiamo che il successivo controllo passaporti avvenga attraverso 3 sportelli, che sono in grado di controllare ciascuno 2 persone al minuto, in media. Descrivere la coppia di code in serie con un unico modello di Markov. Dire intuitivamente se il sistema raggiunge l'equilibrio, giustificando intuitivamente tale affermazione.

1 Soluzioni

Esercizio 1.

1. Stati: A,B,C. $a =$ aumento, $d =$ diminuzione, $b =$ rapporti buoni, $c =$ rapporti critici,

$$\begin{aligned} p_{A,B} = p_{B,C} &= P\left(a|b\right)P(b) + P\left(a|c\right)P(c) \\ &= 0.5 \cdot \frac{10}{12} = \frac{5}{12} = 0.\,416\,67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{C,B} = p_{B,A} &= P\left(d|b\right)P(b) + P\left(d|c\right)P(c) \\ &= 0.1 \cdot \frac{10}{12} + 0.5 \cdot \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0.\,166\,67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{A,A} &= 1 - p_{A,B} = \frac{7}{12} = 0.\,583\,33 \\ p_{B,B} &= 1 - p_{B,C} - p_{B,A} = \frac{5}{12} = 0.0\,833\,3 \\ p_{C,C} &= 1 - p_{C,B} = \frac{5}{6} = 0.833\,33. \end{aligned}$$

2.

$$\pi_A \frac{5}{12} = \pi_B \frac{2}{12}, \quad \pi_B \frac{5}{12} = \pi_C \frac{2}{12}, \quad \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$$

$$\pi_A = \pi_B \frac{2}{5}, \quad \pi_B \frac{5}{2} = \pi_C, \quad \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{2} + 1\right)\pi_B = 1$$

$$\pi_B = \frac{10}{39} = 0.\,256\,41, \quad \pi_A = \frac{4}{39} = 0.\,102\,56, \quad \pi_C = \frac{25}{39} = .\,641\,03.$$

$$E[G] = \left(\frac{4}{39} + 5\frac{10}{39} + 10\frac{25}{39}\right) x = \frac{304}{39} x = 7.7949 \cdot x.$$

3. E' una catena di nascita e morte con 10 stati, $\lambda = \frac{5}{12}$, $\mu = \frac{2}{12}$, quindi, indicando A,B,C,...,L coi numeri 0,1,2,...,9, si ha come sempre

$$\pi_k = \pi_0 \left(\frac{5}{2}\right)^k, \; k = 0, 1, ..., 9$$

ma

$$\sum_{k=0}^{9} \left(\frac{5}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{5}{2}\right)^{10}}{-\frac{3}{2}} = 6357.2$$

$$\pi_0 = \frac{1}{6357.2} = 1.573 \times 10^{-4}$$

ed infine

$$E[G] = \sum_{k=0}^{9} (k+1) 1.573 \times 10^{-4} \left(\frac{5}{2}\right)^k x$$

che (facoltativamente) si può calcolare: $E[G] = 9.3342 \cdot x$.

Esercizio 2.

1. Detto N_5 il numero di persone arrivate alla coda nei cinque minuti di fermo, vogliamo calcolare $P(N_5 > 33)$. Sappiamo che $N_5 \sim \mathcal{P}(\lambda \cdot 5)$, dove λ è il numero medio di arrivi per unità di tempo, unità che qui è il minuto, quindi $\lambda = 5$, $N_5 \sim \mathcal{P}(25)$,

$$P(N_5 > 33) = \sum_{k=34}^{\infty} e^{-25} \frac{25^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{33} e^{-25} \frac{25^k}{k!}.$$

$(= .0497 8)$.

2. Il numero di persone in coda è descritto da un modello markoviano di nascita e morte a tempo continuo con tasso di crescita $\lambda = 5$, e tasso di decrescita che dipende dallo stato, essendoci c serventi. Il tasso da 1 a 0 è 3, il tasso da 2 a 1 è $2 \cdot 3$ (se $c \geq 2$) e così via fino al tasso da c a $c-1$ che è $c \cdot 3$; poi il tasso da $c+k$ a $c+k-1$ è sempre $c \cdot 3$, per ogni $k \geq 1$. Dai calcoli (che sarebbe necessario ripetere) si trova la condizione $c \cdot 3 \geq 5$, quindi $c = 2$ è il numero minimo di passaggi che permette di avere una coda non esplosiva.

Il numero medio di persone in coda è

$$E[N] = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_0 a_k$$

dove $a_1 = \frac{5}{3}$, $a_2 = \frac{5^2}{3\cdot(2\cdot 3)}$, $a_3 = \frac{5^3}{3\cdot(2\cdot 3)^2}$, e così via

$$a_k = \frac{5^k}{3^k \cdot 2^{k-1}} = 2\frac{5^k}{6^k},\ k \geq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{5^k}{6^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{5^k}{6^k} - 1 = \frac{2}{1-\frac{5}{6}} - 1 = 11$$

quindi

$$E[N] = 2\pi_0 \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{5^k}{6^k} = \frac{2}{11}\frac{\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = 5.4545.$$

Il numero medio non è inferiore a 4.

3. Gli stati sono le coppie (k, n), dove k indica il numero di persone al controllo bagagli, n il numero di quelle al controllo passaporti. Le transizioni sono $(k, n) \to (k+1, n)$, $(k, n) \to (k-1, n+1)$, $(k, n) \to (k, n-1)$, coi seguenti tassi:

- $\lambda = 5$ per $(k, n) \to (k+1, n)$
- 3 per $(1, n) \to (0, n+1)$, $2 \cdot 3$ per $(k, n) \to (k-1, n+1)$ con $k \geq 2$
- 3 per $(k, 1) \to (k, 0)$, $3 \cdot 2$ per $(k, 2) \to (k, 1)$, $3 \cdot 3$ per $(k, n) \to (k, n-1)$ per ogni $n \geq 3$.

La prima coda raggiunge l'equilibrio. Quando questo accade, il ritmo in uscita deve essere pari a quello in entrata (non possono uscire meno persone di quelle che entrano, per unità di tempo, e neppure di più). Quindi è come se la seconda coda avvesse in entrata un processo di Poissono di intensità 5, che con tre sportelli di tasso 2 raggiunge l'equilibrio ($3 \cdot 2 > 5$).