Metodi e Modelli Matematici di Probabilità per la Gestione

31 Gennaio 2007

Esercizio 1. Due aziende si contendono il mercato (di un certo prodotto). Il mercato può essere in tre stati: uno stato neutro in cui ciascuna azienda ne occupa il 50%, uno stato favorevole all'azienda A in cui essa ne occupa il 75%, ed uno stato favorevole all'azienda B in cui essa ne occupa il 75%.

Entrambe le aziende, quando si trovano in vantaggio, non effetuano investimenti, mentre quando sono in svantaggio, effettuano un investimento di entità I_0 che con probabilità p_0 le porta in parità (altrimenti le cose restano come sono).

Quando si trovano in parità, l'azienda A effettua un investimento di entità I_A che con probabilità p_A aumenta l'attenzione del mercato verso il prodotto di A, ed analogamente l'azienda B effettua un investimento di entità I_B che con probabilità p_B aumenta l'attenzione del mercato verso il prodotto di B; se il mercato ha aumentato l'attenzione verso entrambe o verso nessuna delle due, si resta in parità, altrimenti passa in vantaggio quella che ha aumentato l'attenzione.

1) Descrivere questa dinamica con una catena di Markov a tempo discreto (si supponga ad esempio di osservare lo *stato del mercato* ogni fine mese e che le azioni di investimento siano effettuate nell'intertempo tra un'osservazione e l'altra).

2) Supponiamo $p_0 = 0.3$, $p_B = 0.3$. L'azienda A possiede maggiori risorse per cui può investire di più, cioè scegliere $I_A > I_B$ ed avere $p_A > p_B$. Determinare p_A in modo che l'azienda A sia in vantaggio, a regime, il 70% delle volte.

3) Calcolare l'investimento medio, a regime, dell'azienda A, che serve per realizzare il risultato del punto 2.

Esercizio 2. Un docente chiede ai propri studenti di realizzare un progetto come prova orale. Ogni studente può decidere in qualsiasi momento di richiedere al docente il comando del progetto da eseguire. Dopo un tempo T_{prog} lo studente consegna il progetto. Il docente impiega un tempo aleatorio esponenziale T_{corr} a correggere ciascun progetto.

1) Semplifichiamo la situazione precedente ignorando la fase di richiesta e realizzazione del progetto. Quindi guardiamo le cose solo dal punto di vista del docente che riceve i progetti e li deve correggere. Supponiamo che il docente riceva i progetti finiti con intertempi aleatori esponenziali T_{inter} e

che corregga un progetto per volta. Supponiamo che i valori medi di T_{corr} e T_{inter} siano di n gg. e 3 gg. rispettivamente. Come deve scegliere n (numero anche non intero), il docente, per avere al massimo un progetto da correggere per il 90% del tempo, a regime?

2) Continuiamo nell'ottica semplificata del punto 1. Il docente modifica la sua strategia e lavora contemporaneamente alla correzione di tutti i progetti ricevuti (ed inizia la correzione di ogni progetto appena lo riceve). Per ciascun progetto la correzione dura un tempo T_{corr} di media 5 gg. Calcolare il numero medio di compiti da correggere, a regime. Si ricorda lo sviluppo di Taylor della funzione esponenziale: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

3) Ora prendiamo in considerazione il problema completo descritto all'inizio, con le richieste da parte degli studenti ed i loro tempi T_{prog} di esecuzione dei progetti stessi ed eliminiamo le specifiche descritte ai punti 1 e 2. Supponiamo che tra una richiesta e la successiva passi un tempo esponenziale di media 3 gg. Supponiamo che il tempo T_{prog} di esecuzione di ciascun studente sia esponenziale ed abbia media 7 gg. Supponiamo che il docente corregga i compiti secondo le modalità del punto 2. Descrivere ora il sistema, in cui si deve tener conto sia del numero di richieste attive sia del numero di compiti da correggere.

1 Soluzioni

Soluzione esercizio 1.

1) Chiamiamo A, B e P (=parità) i tre stati del mercato. Le transizioni possibili sono:

$$\begin{aligned} &A \to A, \quad A \to P \\ &B \to B, \quad B \to P \\ &P \to P, \quad P \to A, \quad P \to B. \end{aligned}$$

Quando siamo in A l'azienda B investe, quindi con probabilità p_0 si va in parità. Quindi, in modo simile

$$\begin{aligned} p_{AP} &= p_0, \quad p_{AA} = 1 - p_0 \\ p_{BP} &= p_0, \quad p_{BB} = 1 - p_0. \end{aligned}$$

Quando siamo in parità, entrambe le aziende investono; si passa ad A se solo A aumenta l'attenzione, quindi con probabilità $p_A\,(1 - p_B)$. Quindi, in modo

simile,

$$p_{PA} = p_A (1 - p_B), \quad p_{PB} = p_B (1 - p_A)$$
$$p_{PP} = 1 - p_A (1 - p_B) - p_B (1 - p_A) = p_A p_B + (1 - p_A)(1 - p_B).$$

2)

$$p_{AP} = 0.3, \quad p_{AA} = 0.7$$
$$p_{BP} = 0.3, \quad p_{BB} = 0.7$$

$$p_{PA} = p_A \cdot 0.7, \quad p_{PB} = 0.3 \cdot (1 - p_A), \quad p_{PP} = 0.7 - 0.4 \cdot p_A$$

Dal bilancio di flusso troviamo π_A, π_B, π_P. Vogliamo che con probabilità 0.7 sia A in vantaggio, cioè $\pi_A = 0.7$. Da qui ricaviamo $p_A = 1$. Se invece si pone $\pi_A = 0.7$ (problema alternativo suggerito in aula) si trova $p_A = 0.6$.

3) A regime, l'azienda A investe I_0 ogni volta che è in svantaggio, I_A ogni volta che è in parità, quindi il suo investimento vale I_0 con probabilità π_B, I_A con probabilità π_P. Il valor medio è

$$I_0 \pi_B + I_A \pi_P.$$

Soluzione esercizio 2.

1) Consideriamo il numero di progetti pervenuti da correggere. E' una catena di nascita e morte a tempo continuo, con tasso di crescita $\lambda = \frac{1}{E[T_{inter}]} = \frac{1}{3}\ gg^{-1}$ e tasso di descrecita $\mu = \frac{1}{E[T_{corr}]} = \frac{1}{n}\ gg^{-1}$. La catena raggiunge il regime stazionario se $n < 3$. Si calcolano le probabilità invarianti

$$\pi_k = (1 - \rho)\, \rho^k$$

dove $\rho = \frac{n}{3}$. Vogliamo che, a regime, con probabilità 0.9 il numero di progetti da correggere sia ≤ 2. Quindi deve essere

$$\pi_0 + \pi_1 = 0.9.$$

L'equazione diventa

$$(1 - \rho)(1 + \rho) = 0.9$$

ovvero $1 - \rho^2 = 0.9$, $\rho^2 = 0.1$, $n^2 = 0.1 \cdot 3^2$, $n = 0.316\,23 \cdot 3 = 0.948\,69$.

2) Il numero di progetti da correggere è sempre una catena di nascita e morte ma i tassi di decrescita dipendono dallo stato. Se il numero di progetti

è k, il docente sta lavorando a k correzioni, quindi completa la prima di esse con tasso $k \cdot \frac{1}{5}$.

Vale ora

$$a_k = \frac{\frac{1}{3^k}}{k! \cdot \frac{1}{5^k}} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^k}{k!}$$

$$\pi_0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^k}{k!} \right)^{-1} = e^{-\frac{5}{3}}, \quad \pi_k = e^{-\frac{5}{3}} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^k}{k!}$$

Il numero medio di compiti è

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\frac{5}{3}} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\frac{5}{3}} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^k}{k!} \\ &= e^{-\frac{5}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^k}{(k-1)!} = e^{-\frac{5}{3}} \frac{5}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-\frac{5}{3}} \frac{5}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^k}{k!} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

3) Gli stati sono ora le coppie (n, k) dove n è il numero di richieste attive (cioè le richieste effettuate e non ancora consegnate) e k è il numero di compiti da correggere. Si passa da (n, k) a $(n+1, k)$ con tasso $\frac{1}{3}$. Si passa da (n, k) a $(n-1, k+1)$ con tasso $\frac{n}{7}$. Si passa da (n, k) a $(n, k-1)$ con tasso $\frac{k}{5}$.