MMMPG
prova scritta del 15/12/06

Esercizio 1. Una piccola ditta di mobili lavora su commessa. Arriva mediamente una richiesta ogni 10 giorni (lavorativi), quindi con una certa approssimazione si può pensare che in ciascun giorno, con probabilità 0.9 non arriva alcuna richiesta, oppure ne arriva una con probabilità 0.1, mentre decidiamo di trascurare l'eventualità che ne arrivi più di una. Le richieste che arrivano durante una giornata vengono lavorate a partire dal giorno successivo. La ditta impiega mediamente N_g giorni a completare un lavoro richiesto, quindi con una certa approssimazione si può pensare che ogni giorno (se ci sono richieste da completare) o non completa nessuna richiesta, e questo accade con probabilità $\frac{N_g-1}{N_g}$, oppure ne completa una, con probabilità $\frac{1}{N_g}$, mentre decidiamo di trascurare l'eventualità che ne completi più d'una. Il valore di N_g dipende dal numero N_a di addetti attraverso la formula $N_g N_a = 24$.

1) A fine giornata, si contano i lavori da eseguire ancora in sospeso. Descrivere questo numero con una catena di Markov a cadenza giornaliera.

Stabilire quanti addetti sono necessari per soddisfare le richieste (se possibile, rispondere a questa domanda in maniera sostanzialmente rigorosa ma senza ancora calcolare misure invarianti).

SOLUZIONE: stati = 0,1,..., transizioni primi vicini, $p_{0,1}$ =0.1, $p_{k,k+1}$ =$0.1\cdot\frac{N_g-1}{N_g}$, $p_{k,k-1}$ =$0.9\cdot\frac{1}{N_g}$, si raggiunge il regime stazionario se

$$0.1 \cdot \frac{N_g - 1}{N_g} < 0.9 \cdot \frac{1}{N_g}$$

da cui si trova $N_g < 10$, $N_a = 3$.

2) Calcolare (relativamente al numero di addetti trovato) la probabilità a regime di non avere nulla da lavorare. Calcolare inoltre il numero medio di pezzi da lavorare. [Nota: pur essendo sufficiente una risoluzione approssimata, sarebbe meglio tener presente che $p_{0,1}$ è diversa da $p_{k,k+1}$ per $k \geq 1$.]

Sapreste dire, intuitivamente, quanti giorni, mediamente, deve attendere un cliente prima di avere il lavoro svolto? Giustificare intuitivamente la risposta.

SOLUZIONE: con i soliti conti che non riportiamo, si arriva a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{\rho}{1-\rho}$$

dove λ_0 =0.1, $\lambda = 0.1 \cdot \frac{N_g-1}{N_g} = 0.1 \cdot \frac{7}{8} = .0\,875$, $\rho = \frac{0.1 \cdot \frac{N_g-1}{N_g}}{0.9 \cdot \frac{1}{N_g}} = \frac{0.1 \cdot \frac{7}{8}}{0.9 \cdot \frac{1}{8}} = 0.777$, quindi

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{\rho}{1-\rho}} = \frac{1}{1 + \frac{8}{7} \frac{0.777}{1-0.777}} = 0.201.$$

Il numero medio di richieste è, ricordando che $a_k = \frac{\lambda_0}{\lambda} \rho^k$ per $k \geq 1$, $a_0 = 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_0 a_k &= \pi_0 \frac{\lambda_0}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \\
&= \pi_0 \frac{\lambda_0}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k = \pi_0 \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \\
&= 0.201 \frac{8}{7} \cdot \frac{0.777}{(1-0.777)^2} = 3.\,589\,2.
\end{aligned}$$

3) Si consideri l'evento: "il giorno n-esimo ci sono k richieste in sospeso ed il giorno $(n+1)$-esimo ce ne sono $k-1$. Calcolare la probabilità a regime di questo evento. Calcolare poi la probabilità a regime dell'evento: "da un giorno al successivo le richieste in sospeso calano di una unità" [Si verifichi preliminarmente che

$$P\left(X_{n+1} = X_n - 1 | X_n = k\right) = \frac{P\left(X_n = k, X_{n+1} = k-1\right)}{P\left(X_n = k\right)}$$

mediante la definizione di probabilità condizionale].

SOLUZIONE: La prima vale ($k \geq 1$, altrimenti è zero)

$$\begin{aligned}
&P\left(X_n = k, X_{n+1} = k-1\right) \\
&= P\left(X_{n+1} = k-1 | X_n = k\right) P\left(X_n = k\right) \\
&= p_{k,k-1}\pi_k = \frac{0.9}{N_g}\pi_0 a_k = \frac{0.9}{N_g}\pi_0 \frac{\lambda_0}{\lambda}\rho^k
\end{aligned}$$

mentre la seconda

$$
\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=X_n-1\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X_{n+1}=X_n-1 | X_n=k\right) P\left(X_n=k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X_n=k, X_{n+1}=k-1\right) \\
&= \frac{0.9}{N_g}\pi_0\frac{\lambda_0}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k = \frac{0.9}{N_g}\pi_0\frac{\lambda_0}{\lambda}\left(\frac{1}{1-\rho}-1\right).
\end{aligned}
$$

Esercizio 2. Una stampante (del settore di produzione di una casa editrice) lavora a ciclo continuo. Ogni tanto però la qualità della stampa non è più ammissibile (alla lunga si sporcano alcune componenti), per cui si deve interrompere la stampa ed eseguire una complessa manutenzione. Si osserva che il deterioramento accade dopo un tempo di funzionamento T_f, esponenziale, di media 30 giorni, mentre la manutenzione richiede un tempo aleatorio esponenziale mediamente di un giorno.

0) [Non è necessario risolvere questo punto, ma può aiutare] Descrivere questo sistema con un modello markoviano al fine di calcolare la probabilità a regime di trovare la stampante funzionante.

SOLUZIONE: due stati, F = funziona, NF = non funziona, ecc.

1) La casa editrice, occupandosi anche di quotidiani, non può sopportare il fermo della stampante per cui ne tiene una seconda pronta per essere utilizzata non appena la prima richiede manutenzione. Questa seconda stampante è però meno sofisticata, per cui si rompe dopo un tempo di lavoro aleatorio esponenziale di media 5 giorni e richiede un tempo esponenziale di media 1 giorno per ripartire. Appena la macchina principale viene riattivata, si interrompe l'uso della secondaria. Se la secondaria si rompe prima che la principale sia riattivata, la squadra di riparatori insiste solamente sulla principale, occupandosi della secondaria solo dopo aver fatto ripartire la principale. Descrivere il sistema con un modello markoviano.

SOLUZIONE. Stati: F_1F_2 = entrambe funzionano, F_1R_2 = la macchina principale (detta $M1$) funziona, la secondaria no, R_1F_2 = la macchina principale non funziona ma la secondaria sì, R_1R_2 = entrambe non funzionano. Transizioni e tassi:

- Nello stato F_1F_2 è attivo solo l'orologio della macchina principale (l'altra è funzionante ma ferma); quindi c'è solo la transizione $F_1F_2 \to R_1F_2$ ed il tasso è $\lambda_1 = \frac{1}{30}$ (il tempo è misurato in giorni).

- Nello stato R_1F_2 sono attivi due orologi, uno della riparazione di $M1$, l'altro di rottura di $M2$. Quindi $R_1F_2 \to F_1F_2$ con tasso $\mu = 1$, $R_1F_2 \to R_1R_2$ con tasso $\lambda_2 = \frac{1}{5}$.

- Nello stato R_1R_2 è attivo solo l'orologio di riparazione di $M1$, quindi $R_1R_2 \to F_1R_2$ con tasso $\mu = 1$.

- Nello stato F_1R_2 sono attivi due orologi, uno della riparazione di $M2$, l'altro di rottura di $M1$. Quindi $F_1R_2 \to F_1F_2$ con tasso $\mu = 1$, $F_1R_2 \to R_1R_2$ con tasso $\lambda_1 = \frac{1}{30}$.

2) Calcolare la probabilità a regime di trovarsi con entrambe le macchine ferme.

Se si vuole che questa probabilità sia inferiore allo 0.001, bisogna che il tempo medio di sopravvivenza delle due macchine sia più alto: quali valori sono sufficienti? La disequazione finale nelle due variabili non deve essere risolta, ma solo scritta.

SOLUZIONE. Le equazioni del bilancio di flusso sono (ponendo $A = F_1F_2$, $B = R_1F_2$, $C = R_1R_2$, $D = F_1R_2$):

$$\begin{aligned}
\lambda_1\pi_A &= \pi_B + \pi_D \\
\pi_B(1+\lambda_2) &= \lambda_1\pi_A \\
\pi_C &= \lambda_2\pi_B + \lambda_1\pi_D \\
\pi_D(1+\lambda_1) &= \pi_C \\
1 &= \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\lambda_1\pi_A &= \pi_B + \pi_D \\
\pi_B(1+\lambda_2) &= \lambda_1\pi_A \\
\pi_D(1+\lambda_1) &= \lambda_2\pi_B + \lambda_1\pi_D \text{ ovvero } \pi_D = \lambda_2\pi_B \\
1 &= \pi_A + \pi_B + \pi_D(1+\lambda_1) + \pi_D
\end{aligned}$$

da cui

$$1 = \frac{\pi_B(1+\lambda_2)}{\lambda_1} + \pi_B + \lambda_2\pi_B(2+\lambda_1)$$

da cui

$$\pi_B = \frac{1}{\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1} + 1 + \lambda_2(2+\lambda_1)} = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2(2+\lambda_1)}$$

da cui

$$\pi_D = \frac{\lambda_1\lambda_2}{1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2(2+\lambda_1)}$$

quindi infine

$$\pi_C = \frac{\lambda_1\lambda_2(1+\lambda_1)}{1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2(2+\lambda_1)}.$$

La condizione è

$$\frac{\lambda_1\lambda_2(1+\lambda_1)}{1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2(2+\lambda_1)} \leq 0.001.$$

Il valore di π_C con i nostri dati è invece 5.5249×10^{-3}.

3) Supponiamo che la macchina secondaria venga sostituita da un modello nuovo di cui ancora non si conoscono bene le caratteristiche. Si osserva che, quando la macchina principale è ferma e la secondaria lavora, nel 90% dei casi viene aggiustata la macchina principale prima che si rompi anche la secondaria. Che tempo medio di funzionamento ha la nuova macchina secondaria? Non è sufficiente una risposta numerica su sola base intuitiva; casomai, si può interpretare intuitivamente il risultato ottenuto con metodi rigorosi.

SOLUZIONE. Quando ci troviamo nello stato R_1F_2 sono attivi due orologi, uno della riparazione di $M1$, l'altro di rottura di $M2$. Quindi $R_1F_2 \to F_1F_2$ con tasso $\mu = 1$, $R_1F_2 \to R_1R_2$ con tasso $\lambda_2 = \frac{1}{M}$, dove M è il tempo medio di funzionamento richiesto. Sappiamo che

$$\frac{\mu}{\mu + \lambda_2} = 0.9$$

ovvero $\frac{1}{1+\lambda_2} = 0.9$, $1 + \lambda_2 = \frac{1}{0.9}$, $\lambda_2 = \frac{1}{0.9} - 1 = \frac{0.1}{0.9}$, $M = \frac{0.9}{0.1} = 9$.

4) Proseguendo il punto 1, supponiamo però che il reparto manutenzione abbia una seconda squadra, meno veloce di quella descritta sopra, che esegue una riparazione (della macchina principale o della secondaria, indifferentemente) con un tempo medio di 2 giorni. La squadra più lenta entra in gioco solo se quella più veloce è già impegnata. Inoltre, se quella veloce completa una riparazione mentre quella lenta sta lavorando, la lenta cede il lavoro alla veloce.

Descrivere ora il sistema con un modello markoviano.

Quando entrambe le macchine sono rotte, quanto si deve attendere mediamente prima che la stampa riparta?

SOLUZIONE. Modifichiamo dove necessario gli stati precedenti. Nello stato F_1F_2 le squadre di riparazione sono ferme, quindi non ci sono ambiguità. Nello stato R_1F_2 si arriva solo da F_1F_2, quindi lavora la squadra veloce: non ci sono ambiguità e continua ad essere $\mu = 1$ il tasso di ritorno a F_1F_2. Nello stato F_1R_2 lavora sicuramente la squadra veloce: ci si arriva da R_1R_2 ed in ogni caso è la squadra veloce che prende il lavoro da svolgere. Invece nello stato R_1R_2 non possiamo sapere quale squadra lavora M_1, quindi dobbiamo sdoppiare R_1R_2 in $R_1S_1R_2$ e $R_1S_2R_2$ a seconda che la macchina M_1 venga riparata dalla squadra S_1 oppure S_2. Da R_1F_2 si va per forza in $R_1S_1R_2$ (con tasso λ_2). Da F_1R_2 si va per forza in $R_1S_2R_2$ (con tasso λ_1). Da $R_1S_1R_2$ si

va in F_1R_2 con tasso $\mu = 1$ ed in R_1F_2 con tasso $\mu_2 = 0.5$. Infine, da $R_1S_2R_2$ si va in F_1R_2 con tasso $\mu_2 = 0.5$ ed in R_1F_2 con tasso $\mu = 1$.

Quando ci si trova in R_1R_2 si deve attendere un tempo esponenziale di parametro 1.5 (per il teorema sul minimo di v.a. esponenziali). Quindi si deve attendere mediamente un tempo pari a $\frac{1}{1.5} = .\,666\,67$ giorni.