Metodi e Modelli Matematici di Probabilità per la Gestione
12 Gennaio 2007

Esercizio 1. a) Alla fine di ogni settimana il gestore di un negozio di vestiti fa il punto della situazione e manda una richiesta di rifornimento. Ogni giorno dal lunedì al venerdì, relativamente ad un certo capo di vestiario, vende un pezzo con probabilità 0.1 oppure nessun pezzo con probabilità 0.9. Il sabato ne vende uno con probabilità 0.3, nessuno con probabilità 0.7. Se un certo giorno vende l'ultimo pezzo disponibile e quindi si trova senza pezzi in negozio, esegue un'ordinazione "veloce" di un pezzo che gli viene recapitato entro sera, con una spesa di k Euro per il recapito. Alla fine della settimana esegue un'ordinazione dipendente dal numero di pezzi rimasti, in modo da riportare sempre la riserva a 5 pezzi. Tale rifornimento costa k euro, indipendentemente dal numero di pezzi richiesti, ed il rifornimento arriva in negozio prima dell'apertura del lunedì mattina. Se però il sabato sera il gestore ha ancora tutti e 5 i pezzi in negozio, non chiede il rifornimento e non lo paga.

Descrivere il numero di pezzi rimasti in negozio al termine della settimana con una catena di Markov a tempo discreto. Lasciare scritte in formule le probabilità di transizione (nel senso che non è necessario calcolarle numericamente).

b) Calcolare la spesa media settimanale relativa ai rifornimenti.

c) Supponiamo ora di considerare un capo molto costoso e più complesso da reperire. Il gestore riporta la scorta settimanale solo a 2 pezzi invece che a 5, durante il fine settimana, e non esiste l'opzione dei rifornimenti immediati infrasettimanali. Anzi, il gestore deve addirittura far partire l'ordine dell'unico rifornimento settimanale il venerdì sera, sulla base dei pezzi venduti fino a quel momento. Supponiamo che per quel capo costoso, in un generico giorno dal lunedì al venerdì, arrivi una richiesta con probabilità 0.05, nessuna con probabilità 0.95, mentre il sabato arrivi una richiesta con probabilità 0.1, nessuna con probabilità 0.9.

Si può descrivere il numero di pezzi in negozio alla chiusura del sabato sera, con una catena di markov a tempo discreto? Se sì, farlo, altrimenti motivare la risposta negativa e trovare un modo corretto di descrivere il sistema con una catena di markov a tempo discreto con cadenza settimanale.

Esercizio 2. a) Un macchinario prende dei pezzi allo stato grezzo e li perfeziona. Ha un deposito a monte in cui vengono messi in coda i pezzi in attesa di lavorazione. Impiega un tempo esponenziale di media 1 ora a completare una lavorazione. I pezzi grezzi gli vengono inviati (o vengono inviati al suo deposito se il macchinario è occupato) secondo un processo di Poisson e l'intertempo tra l'arrivo di un pezzo e quello del successivo ha media 2 ore. Al termine di una lavorazione si possono presentare due casi. Con probabilità 0.1 la lavorazione risulta insufficiente; in questo caso in pezzo viene rimesso immediatamente in fondo alla coda (quel pezzo è come tutti gli altri che arrivano, cioè richiede sempre un tempo medio di un'ora per essere lavorato). Con probabilità 0.9 il pezzo è invece pronto ed esce dal sistema. Descrivere questo sistema con un processo di Markov a salti. Giustificare nel modo più accurato possibile i valori scelti per i tassi di transizione. Stabilire se il sistema raggiunge lo stato

stazionario ed in tal caso calcolare il numero medio di pezzi nel deposito del macchinario.

b) Eliminiamo da qui in poi la complicazione dei pezzi da rilavorare, per cui supponiamo che con tempo medio di un'ora il macchinario produca un pezzo ben lavorato. Supponiamo che i pezzi lavorati da quel macchinario vengano poi inviati ad una batteria di forni, per un trattamento termico. La batteria di forni ha un (unico) deposito a monte in cui vengono messi i pezzi lavorati dal macchinario, se tutti i forni sono occupati. I pezzi che hanno completato il trattamento termico escono dal sistema. Descrivere questo nuovo sistema con un processo di Markov a salti. Non importa distinguere quali forni sono occupati ma solo quanti lo sono.

c) Supponiamo, con una certa idealizzazione, che i pezzi in uscita dal macchinario arrivino alla batteria dei forni (o al loro deposito se necessario) secondo un processo di Poisson dello stesso tipo di quello delle immissioni nel sistema. Trascuriamo la prima parte del sistema, cioè il macchinario, e consideriamo il sistema formato solamente dalla batteria di forni col loro deposito. Supponiamo che il trattamento termico di un pezzo duri un tempo esponenziale di media 5 ore. Quanti forni servono per far sì che il sistema raggiunga un regime stazionario? Rispondere per esteso, cioè descrivendo il sistema con un processo di Markov a salti e svolgendo i calcoli necessari. Impostare, fin dove si riesce ad arrivare, il calcolo del numero medio di pezzi presenti nel deposito, a regime.

1 Soluzioni

Soluzione Esercizio 1. a) Gli stati sono 0,1,2,3,4,5. Le transizioni non dipendono dallo stato di partenza. Per descriverle introduciamo le v.a. N_{LV} = numero di pezzi venduti tra lunedì e venerdì, N_S = numero di pezzi venduti il sabato. Si transisce in 0 se il venerdì sera abbiamo un pezzo e $N_S = 1$. Il venerdì sera abbiamo un pezzo in due casi: $N_{LV} = 4$ oppure $N_{LV} = 5$ (in quest'ultimo caso si chiede un rifornimento veloce e si paga k). In definitiva, per ogni i =0,1,2,3,4,5,

$$\begin{aligned} p_{i0} &= P\left(N_S = 1, \{N_{LV} = 4 \text{ oppure } N_{LV} = 5\}\right) \\ &= P\left(N_S = 1\right) P\left(N_{LV} = 4 \text{ oppure } N_{LV} = 5\right) \\ &= 0.3 \cdot \left(P\left(N_{LV} = 4\ \right) + P\left(N_{LV} = 5\right)\right). \end{aligned}$$

La v.a. N_{LV} è somma di 5 Bernoulli di parametro 0.1, quindi è una $B\left(5, 0.1\right)$. Pertanto

$$P\left(N_{LV} = 4\ \right) + P\left(N_{LV} = 5\right) = \binom{5}{4} 0.1^4 \cdot 0.9 + 0.1^5$$

che va sostituita nella formula precedente (il risultato numerico è $p_{i0} = 1.38 \times 10^{-4}$). In modo analogo

$$\begin{aligned} p_{i1} &= P\left(N_S = 0, \{N_{LV} = 4 \text{ oppure } N_{LV} = 5\}\right) + P\left(N_{LV} = 3, N_S = 1\right) \\ &= 0.7 \left(\binom{5}{4} 0.1^4 \cdot 0.9 + 0.1^5 \right) + \binom{5}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.3 \end{aligned}$$

(pari a 2.752×10^{-3})

$$\begin{aligned} p_{i2} &= P\left(N_{LV}=3, N_S=0\right) + P\left(N_{LV}=2, N_S=1\right) \\ &= \binom{5}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.7 + \binom{5}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^3 \cdot 0.3 \end{aligned}$$

(pari a 0.0 275 4)

$$\begin{aligned} p_{i3} &= P\left(N_{LV}=2, N_S=0\right) + P\left(N_{LV}=1, N_S=1\right) \\ &= \binom{5}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^3 \cdot 0.7 + \binom{5}{1} 0.1 \cdot 0.9^4 \cdot 0.3 \end{aligned}$$

(pari a 0.149 45)

$$\begin{aligned} p_{i4} &= P\left(N_{LV}=1, N_S=0\right) + P\left(N_{LV}=0, N_S=1\right) \\ &= \binom{5}{1} 0.1 \cdot 0.9^4 \cdot 0.7 + 0.9^5 \cdot 0.3 \end{aligned}$$

(pari a 0.406 78) ed infine

$$p_{i5} = P\left(N_{LV}=0, N_S=0\right) = 0.9^5 \cdot 0.7 = 0.413\,34.$$

b) La v.a. C = costo per spese di rifornimento, vale 0 se alla sera del sabato si hanno 5 pezzi, quindi con probabilità p_{i5}; vale $2k$ se $N_{LV}=5$, quindi con probabilità 0.1^5; e vale k in tutti gli altri casi, quindi con probabilità $1-0.1^5-p_{i5}$. In definitiva

$$\begin{aligned} E\left[C\right] &= k\left(1-0.1^5-p_{i5}\right) + 2k \cdot 0.1^5 \\ &= k\left(1+0.1^5-p_{i5}\right) \\ &= k\left(1+0.1^5-0.413\,34\right) \\ &= 0.586\,67 \cdot k. \end{aligned}$$

c) Descrivere il numero di pezzi rimasti con una catena di Markov incontra alcune difficoltà. Ad esempio, se alla sera di sabato abbiamo 1 pezzo, non sappiamo se il lunedì mattina avremo 1 o due pezzi: dipende se il pezzo venduto è stato venduto di sabato o prima. Questo induce a studiare una catena con stati più complessi. Una possibilità è introdurre i cinque stati $A=\{N_{LV}=2\}$, $B=\{N_{LV}=1, N_S=0\}$, $C=\{N_{LV}=0, N_S=0\}$, $D=\{N_{LV}=1, N_S=1\}$, $E=\{N_{LV}=0, N_S=1\}$. Da A, B, C si può transire in A, B, C, D, E, le probabilità di transizione non dipendono dallo stato di partenza e si calcolano in modo analogo a sopra (quando si parte dagli stati A, B, C il lunedì si hanno 2 pezzi). Da D, E si può transire in B, C, E, le probabilità di transizione non dipendono dallo stato di partenza e si calcolano in modo analogo a sopra (quando si parte dagli stati A, B, C il lunedì si ha 1 pezzo).

In realtà, riflettendo bene, si può descrivere il numero di pezzi rimasti con una catena di Markov. Ciò che disturba (impropriamente) è che per decidere

cosa accadrà si deve usare qualche informazione su ciò che è accaduto durante la settimana precedente e questo sembra violare la markovianità, mentre non è così. Precisamente, ad esempio, se alla sera di sabato abbiamo 1 pezzo, il lunedì mattina avremo 1 pezzo se nella settimana precedente $N_S = 1$, 2 pezzi se $N_S = 0$. Questo uso di informazioni del passato non deteriora la markovianità in quanto non stiamo usando informazioni riguardanti la catena di Markov nelle unità temporali passate (cioè il numero di oggetti rimasti nelle sere di sabato passate). In definitiva, si può usare una catena con stati 0,1,2.

Soluzione Esercizio 2. a) Si tratta di una catena di nascita-morte. Il tasso da k a $k+1$ è $\lambda = 1/2$. Il tasso da k a $k-1$ è $\mu = 1 \cdot 0.9$. Spieghiamo in dettaglio quest'ultimo tasso. Una spiegazione (non del tutto completa e rigorosa) è la seguente. Se calcoliamo la probabilità di transizione $P(X_t = k-1 | X_0 = k)$, per t piccolo questa è dominata dal termine

$$P(T_- < t, R = 1)$$

dove T_- è il tempo aleatorio impiegato dal macchinario a completare una lavorazione, R è una v.a. di Bernoulli che vale 1 se il pezzo è buono. Quindi, approssimativamente,

$$P(X_t = k-1 | X_0 = k) \sim P(T_- < t) P(R = 1) = \left(1 - e^{-t \cdot 1}\right) \cdot 0.9 \sim 1 \cdot 0.9 \cdot t.$$

Il numero medio di pezzi in magazzino è

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_k - \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} - (1 - \pi_0)$$

(ecc.)

b) Gli statri ora sono le coppie (k, n) di interi non negativi, dove k indica il numero di pezzi al macchinario, n il numero di pezzi ai forni. Il tasso da (k, n) a $(k+1, n)$ è sempre λ. Il tasso da (k, n) a $(k-1, n+1)$ è $\mu = 1$. Poi esiste la transizione da (k, n) a $(k, n-1)$ quando la batteria di forni completa una lavorazione. Il tasso dipende da n. Se i forni sono N ed il tasso di servizio di ciascuno è $\mu_f = 1/5$, il tasso da (k, n) a $(k, n-1)$ è pari a $1/5$ per $n = 1$, $2/5$ per $n = 2$, e così via $N/5$ per $n = N$, mentre poi è sempre $N/5$ per $n = N + j$, per ogni $j > 0$.

c) Si tratta di una catena di nascita-morte. Il tasso da n a $n+1$ è $\lambda = 1/2$. Il tasso da n a $n-1$ è dipende da n ed è stato appena descritto. Il testo richiede a questo punto di ripetere esplicitamente i conti spiegati a lezione (vedi registro), con cui si arriva alla condizione

$$1/2 < N/5, \text{ ovvero } N = 3$$

per il numero di forni necessari. Il numero medio di pezzi in deposito è ancora

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \pi_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \pi_k - (1 - \pi_0)$$

dove però $\pi_k = \pi_0 a_k$ ha i coefficienti a_k della seguente forma: per $k = 0, 1, ..., N$ sono certi valori, per $k = N + j$ hanno la forma $a_k = a_N \rho^j$. Pertsanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k = \pi_0 \sum_{k=1}^{N} k a_k + \pi_0 a_N \sum_{j=1}^{\infty} (N + j) \rho^j.$$

La prima sommatoria, finita, va calcolata a mano. Per la seconda vale

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (N + j) \rho^j &= N \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j + \sum_{j=1}^{\infty} j \rho^j \\ &= N \left(1 - \frac{1}{1 - \rho}\right) + \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}. \end{aligned}$$