Istituzioni di Probabilità
Laurea magistrale in Matematica
9 Settembre 2014

Esercizio 1. (*punti 10+1.5*) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti, gaussiane standard (media zero e varianza uno). Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue, $f_n : [0,T] \to \mathbb{R}$, tali che

$$\int_0^T f_n(t) f_k(t) \, dt = \delta_{nk} \qquad \text{per ogni } n, k \in \mathbb{N}$$

$(\delta_{nk} = 0$ per $n \neq k$, $\delta_{nn} = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N})$. Sia $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$.

i) Verificare che la serie di funzioni aleartorie $(\omega, t) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n X_n(\omega) f_n(t)$ converge in media quadratica in (ω, t) (cioè esiste una funzione di quadrato integrabile $\xi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tale che $E\left[\int_0^T |\xi_N(t) - \xi(t)|^2 \, dt\right] \to 0$ per $N \to \infty$, dove ξ_N sono le somme parziali della serie). (Sugg.: si usi la completezza dello spazio $L^2(\Omega \times [0,T])$).

Usando il teorema di Fubini-Tonelli, si può dimostrare (questo è facoltativo) che esiste una sottosuccessione $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergente di interi positivi, un insieme $\Upsilon \subset [0,T]$ di misura di Lebesgue piena (cioè pari a T) ed un processo stocastico $(\xi(t))_{t\in\Upsilon}$, tali che $\xi_{N_k}(t) \to \xi(t)$ in $L^2(\Omega)$, per ogni $t \in \Upsilon$. Nel seguito faremo riferimento a questo processo.

ii) Verificare che $(\xi(t))_{t\in\Upsilon}$ è un processo gaussiano (si può usare la stabilità della gaussianità sotto convergenza in media quadratica). Calcolarne le funzioni valor medio $m(t)$ e covarianza $c(t,s)$.

iii) Si verifichi che, se $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|f_n'\|_\infty^2 < \infty$ (dove $\|f_n'\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |f_n'(t)|$), allora $(\xi(t))_{t\in\Upsilon}$ soddisfa la condizione, simile a quella che serve per applicare il teorema di regolarità di Kolmogorov,

$$E\left[|\xi(t) - \xi(s)|^p\right] \leq C_p |t-s|^p, \qquad \text{per ogni } t, s \in \Upsilon$$

per ogni $p \geq 2$ e per opportune costanti $C_p > 0$.

iv) Facoltativo: dedurre che esiste un'estensione $(\xi(t))_{t\in[0,T]}$ del processo precedente, γ-hölderiana per ogni $\gamma \in (0,1)$, e che essa è, nel senso dei processi indistinguibili, la stessa a partire da qualsiasi sottosuccessione $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con le proprietà dette sopra.

Esercizio 2. (*punti 10*) Sia $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una martingala di quadrato integrabile, rispetto ad una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi. Definiamo il processo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ponendo $X_1 = M_1$, $X_n = X_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}(M_n - M_{n-1})$, per $n \geq 2$.

i) Si dimostri che X è una martingala (sempre rispetto a $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) e che $E\left[X_n^2\right] = E\left[X_{n-1}^2\right] + \frac{1}{\alpha_n^2} E\left[M_n^2 - M_{n-1}^2\right]$.

ii) Si deduca che, se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\left[M_n^2\right]}{\alpha_n^2} < \infty$, allora X converge quasi certamente.

iii) Discutere anche la convergenza L^1 ed L^2.

Esercizio 3. (*punti 10+1.5*) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione, $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano. Presa una funzione continua e limitata $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, fissato arbitrariamente $t \geq 0$, indichiamo con $P_t\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$(P_t\varphi)(x) = E\left[\varphi(x + B_t)\right].$$

i) Mostrare che $P_t\varphi$ è continua e limitata.

ii) Mostrare che $P_t\varphi$ è differenziabile, per $t > 0$, e vale

$$\frac{d}{dx}(P_t\varphi)(x) = \frac{1}{t}E\left[\varphi(x + B_t) B_t\right].$$

iii) Mostrare che

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{(P_\epsilon\varphi)(x) - \varphi(x)}{\epsilon} = \frac{\varphi''(x)}{2}$$

per ogni funzione φ di classe C^2 con derivate limitate.

iv) Facoltativo: generalizzare il punto (iii) al caso in cui $x + B_t$ sia sostituito dalla soluzione X_t^x dell'equazione differenziale stocastica

$$dX_t^x = b(t, X_t^x)\, dt + \sigma(t, X_t^x)\, dB_t, \qquad X_0^x = x.$$

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) Basta verificare che la successione $(\xi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $L^2(\Omega\times[0,T])$. Se $M>N$, vale

$$\xi_M(t)-\xi_N(t)=\sum_{n=N+1}^{M}\lambda_n X_n f_n(t)$$

da cui

$$\begin{aligned}E\left[\int_0^T|\xi_M(t)-\xi_N(t)|^2\,dt\right]&=E\left[\int_0^T\left|\sum_{n=N+1}^{M}\lambda_n X_n f_n(t)\right|^2 dt\right]\\&=\sum_{n,k=N+1}^{M}\lambda_n\lambda_k\int_0^T f_n(t)\,f_k(t)\,dtE[X_nX_k]\\&=\sum_{n=N+1}^{M}\lambda_n^2E\left[X_n^2\right]=\sum_{n=N+1}^{M}\lambda_n^2\end{aligned}$$

(abbiamo usato ad un certo punto l'ortogonalità o delle X o delle f). Preso $\varepsilon>0$, siccome $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2<\infty$, esiste N_0 tale che per ogni $M>N>N_0$ vale $\sum_{n=N+1}^{M}\lambda_n^2<\varepsilon$. Ne discende che $(\xi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $L^2(\Omega\times[0,T])$.

ii) Dobbiamo verificare che, per ogni $t_1,...,t_n\in\Upsilon$, il vettore aleatorio $(\xi(t_1),...,\xi(t_n))$ è gaussiano. Il vettore $(\xi_N(t_1),...,\xi_N(t_n))$ è (innanzi tutto ben definito, per ogni scelta dei parametri, perché le funzioni f_n sono continue; poi è) gaussiano, perché trasformazione lineare del vettore gaussiano $(X_1,...,X_N)$. Il vettore $(\xi_{N_k}(t_1),...,\xi_{N_k}(t_n))$ converge, per $k\to\infty$, in $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$, a $(\xi(t_1),...,\xi(t_n))$, quindi $(\xi(t_1),...,\xi(t_n))$ è gaussiano. Vale poi, per $t\in\Upsilon$,

$$m(t)=E[\xi(t)]=\lim_{k\to\infty}E\left[\sum_{n=1}^{N_k}\lambda_n X_n f_n(t)\right]=0$$

perché $E\left[\sum_{n=1}^{N_k}\lambda_n X_n f_n(t)\right]=\sum_{n=1}^{N_k}\lambda_n E[X_n]\,f_n(t)=0$ (le X_n hanno media nulla); e per $t,s\in\Upsilon$ (usando il fatto che la convergenza L^2 detta sopra implica la convergenza L^1 di $\xi_{N_k}(t)\,\xi_{N_k}(s)$)

$$\begin{aligned}c(t,s)=E[\xi(t)\,\xi(s)]&=\lim_{k\to\infty}E\left[\xi_{N_k}(t)\,\xi_{N_k}(s)\right]\\&=\lim_{k\to\infty}E\left[\sum_{n=1}^{N_k}\lambda_n X_n f_n(t)\sum_{n'=1}^{N_k}\lambda_{n'}X_{n'}f_{n'}(s)\right]\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{n,n'=1}^{N_k}\lambda_n\lambda_{n'}E[X_nX_{n'}]\,f_n(t)\,f_{n'}(s)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{N_k}\lambda_n^2f_n(t)\,f_n(s)\end{aligned}$$

perché $E[X_n X_{n'}] = \delta_{n,n'}$ (per l'indipendenza, la media nulla e la varianza unitaria)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n(t) f_n(s).$$

Si noti che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n(t) f_n(s)$ converge assolutamente (ed anche uniformemente in (t,s)) in quanto $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |f_n(t) f_n(s)| \leq \|f_n\|_\infty^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$.

iii)

$$\begin{aligned}
E\left[|\xi(t) - \xi(s)|^2\right] &= c(t,t) + c(s,s) - 2c(t,s) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2(s) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n(t) f_n(s) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(f_n^2(t) + f_n^2(s) - 2 f_n(t) f_n(s)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (f_n(t) - f_n(s))^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left\|f_n'\right\|_\infty^2 |t-s|^2 \leq C_2 |t-s|^2.
\end{aligned}$$

Usando la gaussianità di $\xi(t) - \xi(s)$,

$$E[|\xi(t) - \xi(s)|^p] \leq C_p |t-s|^p.$$

iv) Il teorema di Kolmogorov che conosciamo è enunciato su intervalli; altre versioni usuali sono enunciate su aperti; mentre qui Υ può essere l'insieme dei punti irrazionali di $[0,T]$, quindi non rientra nelle ipotesi usuali. Ovviamente si può estendere il teorema di Kolmogorov a insiemi più generali ma, volendo fare con i nostri strumenti, bisogna prima estendere il processo a tutto $[0,T]$. Estensioni banali, come quella nulla, poi non soddisfano la disuguaglianza $E[|\xi(t) - \xi(s)|^p] \leq C_p |t-s|^p$ per tutti i valori $t, s \in [0,T]$. Quindi va fatta l'estensione giusta.

Prima si usa l'uniforme continuità di $t \mapsto \xi(t)$ come funzione da Υ in $L^2(\Omega)$ per estendere il processo a tutto $[0,T]$. In queso modo esso è continuo su tutto $[0,T]$, inteso come processo a valori in $L^2(\Omega)$ e quindi la disuguaglianza si estende per continuità a tutti i valori $t, s \in [0,T]$. Poi si applica il teorema di Kolmogorov, nel solito modo.

Esercizio 2. i) Per ricorrenza, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è adattato e integrabile. Poi

$$\begin{aligned}
E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= E[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] + \frac{1}{\alpha_n} E[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \\
&= E[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}
\end{aligned}$$

per la proprietà di martingala di M, quindi è una martingala. Vale poi

$$E\left[X_n^2\right] = E\left[X_{n-1}^2\right] + \frac{1}{\alpha_n^2} E\left[\left(M_n - M_{n-1}\right)^2\right] + \frac{2}{\alpha_n^2} E\left[X_{n-1}\left(M_n - M_{n-1}\right)\right].$$

Ora (il seguente fatto può anche essere considerato noto, trovandosi in molti conti del corso),

$$\begin{aligned} E\left[\left(M_n - M_{n-1}\right)^2\right] &= E\left[M_n^2\right] + E\left[M_{n-1}^2\right] - 2E\left[M_n M_{n-1}\right] \\ &= E\left[M_n^2\right] + E\left[M_{n-1}^2\right] - 2E\left[E\left[M_n M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}\right]\right] \\ &= E\left[M_n^2\right] + E\left[M_{n-1}^2\right] - 2E\left[E\left[M_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] M_{n-1}\right] \\ &= E\left[M_n^2\right] + E\left[M_{n-1}^2\right] - 2E\left[M_{n-1}^2\right] \\ &= E\left[M_n^2\right] - E\left[M_{n-1}^2\right]. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} E\left[X_{n-1}\left(M_n - M_{n-1}\right)\right] &= E\left[E\left[X_{n-1}\left(M_n - M_{n-1}\right) | \mathcal{F}_{n-1}\right]\right] \\ &= E\left[X_{n-1} E\left[M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}\right]\right] = 0 \end{aligned}$$

per la proprietà di martingala di M. Quindi $E\left[X_n^2\right] = E\left[X_{n-1}^2\right] + \frac{1}{\alpha_n^2} E\left[M_n^2 - M_{n-1}^2\right]$.

ii) Quindi

$$\begin{aligned} E\left[X_n^2\right] &\leq E\left[X_{n-1}^2\right] + \frac{E\left[M_n^2\right]}{\alpha_n^2} \leq E\left[X_{n-2}^2\right] + \frac{E\left[M_{n-1}^2\right]}{\alpha_{n-1}^2} + \frac{E\left[M_n^2\right]}{\alpha_n^2} \\ &\leq ... \leq E\left[X_1^2\right] + \frac{E\left[M_2^2\right]}{\alpha_2^2} + ... + \frac{E\left[M_{n-1}^2\right]}{\alpha_{n-1}^2} + \frac{E\left[M_n^2\right]}{\alpha_n^2} \leq C \end{aligned}$$

da cui discende $E\left[|X_n|\right] \leq C'$. Quindi per il teorema di convergenza delle martingale, X_n converge quasi certamente.

iii) Inoltre, valendo una stima uniforme per $E\left[X_n^2\right]$, per il teorema di Vitali vale anche la convergenza in L^1.

Infine, per la convergenza in L^2, si può o applicare un teorema però non svolto nel corso (citato ad esercitazione), o ragionare così. Dalla definizione,

$$E\left[\left(X_n - X_{n-1}\right)^2\right] = \frac{E\left[\left(M_n - M_{n-1}\right)^2\right]}{\alpha_n^2} = \frac{E\left[M_n^2\right] - E\left[M_{n-1}^2\right]}{\alpha_n^2} \leq \frac{E\left[M_n^2\right]}{\alpha_n^2}$$

da cui discende che X è di Cauchy in L^2, quindi converge (ed il limite è lo stesso di L^1 perché la convergenza L^2 implica quella L^1).

Esercizio 3. i) Se $x_n \to x^0$, $\varphi\left(x_n + B_t(\omega)\right) \to \varphi\left(x^0 + B_t(\omega)\right)$ per ogni ω, perché φ è continua; ed inoltre $\left|\varphi\left(x_n + B_t(\omega)\right)\right| \leq \|\varphi\|_\infty$ (il sup di φ su $\mathbb{R}$); quindi si può applicare il teorema di convergenza dominata di Lebesgue e dedurre $E\left[\varphi\left(x_n+B_t\right)\right] \to E\left[\varphi\left(x^0+B_t\right)\right]$. Questo significa che $P_t\varphi$ è continua. Inoltre è limitata in quanto

$$\left|E\left[\varphi\left(x+B_t\right)\right]\right| \leq E\left[\left|\varphi\left(x+B_t\right)\right|\right] \leq \|\varphi\|_\infty .$$

ii) Vale

$$E\left[\varphi\left(x+B_t\right)\right] = \int \varphi\left(x+y\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy = \int \varphi\left(z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}}dz.$$

Per $t>0$, l'integrando è derivabile in x e vale

$$\frac{d}{dx}\varphi\left(z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} = \varphi\left(z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}}\frac{z-x}{t}.$$

La derivata è equilimitata dalla costante

$$\frac{1}{t\sqrt{2\pi t}}\|\varphi\|_\infty \sup_{v\in\mathbb{R}}|v|\,e^{-\frac{v^2}{2t}} < \infty$$

quindi $E\left[\varphi\left(x+B_t\right)\right]$ è derivabile e vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}E\left[\varphi\left(x+B_t\right)\right] &= \int \varphi\left(z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}}\frac{z-x}{t}dz \\ &= \int \varphi\left(x+y\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}\frac{y}{t}dy = \frac{1}{t}E\left[\varphi\left(x+B_t\right)B_t\right].\end{aligned}$$

iii) Per la formula di Itô,

$$d\varphi\left(x+B_t\right) = \varphi'\left(x+B_t\right)dB_t + \frac{1}{2}\varphi''\left(x+B_t\right)dt$$

ovvero

$$\varphi\left(x+B_t\right) = \varphi\left(x\right) + \int_0^t \varphi'\left(x+B_s\right)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''\left(x+B_s\right)ds.$$

Siccome le derivate di φ sono limitate, l'integrando stocastico è di classe M_B^2, quindi il valore atteso dell'integrale stocastico è zero; e l'integrando determinisico è limitato, quindi integrabile e si applica Fubini-Tonelli. Vale allora

$$E\left[\varphi\left(x+B_t\right)\right] = \varphi\left(x\right) + \frac{1}{2}\int_0^t E\left[\varphi''\left(x+B_s\right)\right]ds.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\left(P_\epsilon\varphi\right)\left(x\right)-\varphi\left(x\right)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{E\left[\varphi\left(x+B_\epsilon\right)\right]-\varphi\left(x\right)}{\epsilon} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_0^\epsilon E\left[\varphi''\left(x+B_s\right)\right]ds}{\epsilon} = \frac{1}{2}E\left[\varphi''\left(x+B_0\right)\right] = \frac{\varphi''\left(x\right)}{2}.\end{aligned}$$

Abbiamo usato ad un certo punto il teorema fondamentale del calcolo integrale, valido se l'integrando è continuo. La funzione $s \mapsto E\left[\varphi''\left(x+B_s\right)\right]$ è continua, per ragionamenti identici a quelli del punto (i).

iv) Ora poniamo

$$\left(P_t\varphi\right)(x) = E\left[\varphi\left(X_t^x\right)\right].$$

Quindi

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\left(P_\epsilon\varphi\right)(x)-\varphi(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{E\left[\varphi\left(X_\epsilon^x\right)\right]-\varphi(x)}{\epsilon}.$$

Per la formula di Itô,

$$d\varphi\left(X_t^x\right) = \varphi'\left(X_t^x\right)b\left(t,X_t^x\right)dt + \varphi'\left(X_t^x\right)\sigma\left(t,X_t^x\right)dB_t + \frac{\sigma^2\left(t,X_t^x\right)}{2}\varphi''\left(X_t^x\right)dt$$

Usando come sopra che le derivate di φ sono limitate, e mettendo opportune ipotesi su b e σ, si trova

$$E\left[\varphi\left(X_t^x\right)\right] = \varphi(x) + \int_0^t E\left[\varphi'\left(X_s^x\right)b\left(s,X_s^x\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(s,X_s^x\right)\varphi''\left(X_s^x\right)\right]ds.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\left(P_\epsilon\varphi\right)(x)-\varphi(x)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_0^\epsilon E\left[\varphi'\left(X_s^x\right)b\left(s,X_s^x\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\left(s,X_s^x\right)\varphi''\left(X_s^x\right)\right]ds}{\epsilon} \\
&= E\left[\varphi'\left(X_0^x\right)b\left(0,X_0^x\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\left(0,X_0^x\right)\varphi''\left(X_0^x\right)\right] \\
&= \varphi'(x)\,b(0,x)+\frac{1}{2}\sigma^2(0,x)\,\varphi''(x).
\end{aligned}$$