Istituzioni di Probabilità
Laurea magistrale in Matematica
a.a. 2013/14
Registro delle lezioni

Lezione 1 (25/2). Introduzione al corso.

Prime definizioni sui processi stocastici (processo stocastico, distribuzioni di dimensione finita, realizzazioni, processi equivalenti, modificazioni, indistinguibili, processo continuo, misurabile).

Legge di un processo (insiemi cilindrici e σ-algebra relativa, legge del processo, Proposizioni della sezione, inclusa quella sulla legge nello spazio delle funzioni continue, con dimostrazione).

Lezione 2 (26/2). Teorema di estensione di Kolmogorov. La dimostrazione è stata svolta nelle sue parti concettuali, e così deve essere studiata; vari dettagli tecnici sono stati omessi e non costituiscono programma d'esame (es. la verifica dell'additività sull'algebra $\mathcal{A}$ e le dimostrazioni dei lemmi tecnici).

Lezione 3 (28/2). Riassunto sui vettori gaussiani. Funzioni media e covarianza di un processo. Processi Gaussiani: definizione, identificazione della legge da media e covarianza, esistenza.

Lezione 4 (4/3). Filtrazioni: definizioni, completamento, adattamento e progressiva misurabilità; se completa, la modificazione di un adattato è adattato (dim.).

Seconda ora: esercitazione di Maurelli su processi gaussiani.

Lezione 5 (5/3). Filtrazioni: continuità a destra; filtrazione associata ad un processo, completamento, arricchimento continuo a destra (dim.). Tempi d'arresto: definizioni, semplificazione nel caso a tempo discreto (dim.), minimo di due tempi (dim.), teorema su tempo di ingresso in un aperto (dim.).

Moto browniano: definizione (grossolano e perfezionato), teorema di esistenza (di quello grossolano; dim.).

Lezione 6 (7/3). Moto browniano: dimostrazione dell'esistenza di versione continua e γ-hölderiana per ogni $\gamma < 1/2$ a partire dal teorema di Kolmogorov. Inizio dello studio della mancanza di regolarità: definizioni di BV e variazione quadratica ed enunciato del teorema che le lega.

Seconda ora: esercitazione di Maurelli su processi gaussiani e moto browniano.

Lezione 7 (11/3). Dimostrazione del lemma che collega variazione quadratica positiva a mancanza di regolarità BV e regolarità C^α per $\alpha > 1/2$.

Teorema sulla variazione quadratica del moto browniano (dim.).

Visualizzazione di traiettorie browniane.

Teorema sulla non differenziabilità in un punto fissato (dim.).

Lezione 8 (12/3). Teorema sulla non differenziabilità in alcun punto del moto browniano (dim.).

Richiami sulla speranza condizionale (esclusa per ora la Proposizione 11).

Definizione di martingala. Verifica che il moto browniano è una martingala (serve una proprietà del moto browniano che verrà chiarita nella lezione successiva).

Lezione 9 (14/3). Precisazioni sul completamento di filtrazioni (diverso dal completamento di ogni singola σ-algebra). Esempio dello spazio di Wiener; il completamento di $\mathcal{F}_0^{00}$ aggiunge eventi ($\mathcal{F}_t^{00}$ in genere non è completa) ed anticipa il futuro.

Seconda definizione di moto browniano e due implicazioni, con $\mathcal{F}_t^{00}$. Enunciati e cenni di dimostrazione con $\mathcal{F}_t^0$ e $\mathcal{F}_t$ (enunciato del fatto che $\mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}_t$).

Seconda ora: esercitazione di Maurelli su processi gaussiani e moto browniano.

Lezione 10 (18/3). Processo di Poisson. Sua proprietà di martingala (per $N_t - \lambda t$), attraverso criterio generale: i processi a media costante e incrementi indipendenti (integrabili ed adattati) sono martingale. Dimostrazione anche del criterio secondo cui le martingale hanno incrementi scorrelati. Verifica che la media di una martingala è costante.

Digressione sulla fisica che ha originato il moto browniano. Enunciato del criterio secondo cui un processo a incrementi indipendenti e stazionari, continuo e con un po' di integrabilità, è un MB. La continuità contraddistingue i due processi.

Proprietà di Markov. Criterio per verificarla per processi a incrementi indipendenti. Proposizione sul fatto che vale per processi a incrementi indipendenti.

Lezione 11 (19/3). Precisazioni sulle martingale (es. che nel caso discreto basta tra n ed $n+1$), definizioni si sub e super martingala.

Teorema su composizione con funzioni convesse (o convesse monotone).

σ-algebra associata ad un tempo d'arresto. $\sigma(\tau) \subset \mathcal{F}_\tau$.

Teorema d'arresto. Suo corollario sulla proprietà di martingala a tempi aleatori.

Disuguaglianza massimale.

Lezione 12 (21/3). Precisazioni sull'enunciato e dimostrazione della disuguaglianza massimale.

Esempio della martingala chiusa da X.

Corollario della disuguaglianza massimale per $|M_n|^p$ e $e^{\theta|M_n|}$.

Disuguaglianza di Doob.

Generalizzazione a tempo continuo ti tutti questi teoremi.

Lezione 13 (25/3). Esercitazione Maurelli:

1) esercizio sullo scaling (es. 13), corollario dello
scaling (es. 14)

2) il MB passa infinite volte in 0 (es. 20)

3) due esempi di martingale (es. 35 e 44)

4) esercizio sui tempi di uscita del MB da un intervallo (es. 38) (inizio).

Lezione 14 (26/3). Teorema di convergenza per le martingale.

Lezione 15 (28/3). Premessa discorsiva sull'interesse per le equazioni differenziali stocastiche e sul fatto che, o per generalità (σ non costante) o per scopi di calcolo (es. calcolo di $d\left|X_t\right|^2$), serve utilizzare integrali del tipo $\int_0^t X_s dB_s$. Premessa discorsiva sul fatto che tali integrali non possono essere definiti in modo classico (questa parte è spiegata sulle dispense nel capitolo del moto browniano).

Integrale stocastico di processi elementari di quadrato integrabile: proprietà del valore atteso, della varianza (formula di isometria, sua potenzialità per estendere il concetto), proprietà di martingala (dimostrazione da completare).

Lezione 16 (1/4). Corollario al teorema di arresto nel caso di sottomartingale: $\tau_2 = N$.

Teorema di decomposizione di submartingale.

Corollario al teorema di arresto nel caso di sottomartingale: τ_2 qualsiasi (usato nella dim del teorema di convergenza).

Integrali stocastici: proprietà di martingala. Formula di isometria condizionale e proprietà di martingala relativa a M^2 (tutto con dimostrazione).

Lezione 17 (2/4). Esercizio sulle martingale dal compito d'esame del 21/02/2014.

Corollari 10 e 12 sulle martingale.

Proprietà di martingala di $M^2 - [M]^\Delta$ (con dimostrazione).

Lezione 18 (4/4). Integrale stocastico per processi $M_B^2(0,T)$, sue proprietà, fino alla versione continua inclusa (tutte con dimostrazione, salvo l'esistenza di approssimanti elementari e continue).

Integrale di Wiener, sua gaussianità, esercizio n.1 dal compito d'esame del 21/02/2014.

Lezione 19 (8/4). Integrale stocastico per processi $\Lambda_B^2(0,T)$, sue proprietà.

Lezione 20 (9/4). Moto browniano e calcolo stocastico in più dimensioni.

Come applicazione della disuguaglianza di Doob (multidimensionale): unicità per le equazioni differenziali stocastiche (passo 1 del toerema 40).

Lezione 21 (11/4). Esercitazione Maurelli.

Lezione 22 (15/4). Variazione quadratica di una funzione. Formula di Itô pathwise (caso unidimensionale).

Variazione quadratica delle singole traiettorie browniane.

Lezione 23 (16/4). Esercizi dal primo compitino 2012-13 e dal compito di Maggio 2013.

Lunedì 28/4: ricevimento ore 15-17.

Martedì 29/4: Compitino.

Lezione 24 (30/4): Processi di Itô. Enunciato della formula di Itô per tali processi. Varie riscritture della formula di Itô ed esempio di dB_t^2.

Curve in $\mathbb{R}^d$ aventi variazione quadratica congiunta. Enunciato della Formula di Itô-Föllmer (quella per le suddette curve) in più dimensioni. Sua dimostrazione limitatamente al caso di f indipendente dal tempo (la dimostrazione completa, per f anche dipendente dal tempo, si trova nella versione nuova delle dispense, ma non è necessariamente in programma).

Lezione 25 (6/5, 1 ora sola per assemblea). Variazione quadratica delle martingale: lemma sulla limitatezza al variare della partizione.

Lezione 26 (7/5). Teorema di Girsanov: ricerca di un cambio di misura che rende un processo una martingala.

Lezione 27 (9/5). Esercizi sulla formula di Itô (primaparte del n. 3 di gennaio 2014); soluzione dell'equazione $d\rho_t = \rho_t \left(a_t dt + b_t \cdot dB_t\right)$. Teorema di Girsanov: proseguimento della dimostrazione.

Lezione 28 (13/5). Disuguaglianza L^p di Doob per gli integrali di Itô come esercizio sulla formula di Itô.

Teorema di Girsanov: completamento della dimostrazione. Teorema di Lévy.

Lezione 29 (14/5). Condizione di Novikov (senza dimostrazione). Applicazione del Teorema di Girsanov all'esistenza delle soluzioni (deboli) di equazioni differenziali stocastiche.

Definizioni di soluzione debole e soluzione forte. Enunciato del teorema di esistenza delle soluzioni forti sotto ipotesi di Lipschitz.

Lezione 30 (16/5). Equazioni differenziali stocastiche: dimostrazione dell'esistenza. Un esercizio sulla formula di Itô ed equazioni differenziali (l'esempio di fine capitolo)

Lezione 31 (20/5). Dalla lista degli esercizi in rete dell'anno precedente, si consigliano i seguenti: 59, 64, 65 ($E\left[\left(X_T^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2}\right]$ nel testo), 67, 68 (solo prima domanda), 69, 70, 72, 73, 76, 77 (anche senza domanda sulla convergenza), 78, 79.

Svolti o impostati a lezione: 59, 62, 65, 77, ed esercizio 3 del 20/6/2013.

Lemma (solo enunciato) sulla formula $[M]_t = \int_0^t \left(\sigma_s \sigma_s^T\right)^{ij} ds$ se $M_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$.

Esercizio sul cambio di scala temporale (si veda la sezione delle dispense sul Teorema di Lévy).

Lezione 32 (21/5). Esercizi. Completamento di due esercizi della lezione precedente; in particolare, per l'esercizio 3 del 20/6/2013, verificato che una certa espressione è un moto browniano, usando il Teorema di Lévy. Svolto anche il seguente esercizio (alcuni dettagli tecnici devono essere svolti un po' sommariamente, affinché abbia la consistenza di un normale esercizio):

Esercizio: Sia X una soluzione (processo continuo e adattato) di

$$dX_t = a_t X_t dt + b_t X_t dB_t$$

con $a \in \Lambda_B^1, b \in \Lambda_B^2$.

i) Si supponga di sapere che $X_t > 0$. Calcolare $d \log (X_t)$.

ii) Dimostrare che $X_t > 0$.

iii) Ottenere che $X_t = \exp\left(\int_0^t \left(a_s + \frac{1}{2}b_s^2\right) ds + \int_0^t b_s dB_s\right)$ e quindi l'unicità forte delle soluzioni.

Martedì 27/5: secondo compitino.

Cosa non è stato svolto delle dispense. Alcuni temi presenti nelle dispense di quest'anno, pur toccati, non sono stati trattati in tutti i dettagli. Ecco un elenco forse parziale; si pregano gli studenti di segnalare altri esempi simili da inserire in questo registro, per facilitare lo studio di tutti.

i) Dimostrazione dei lemmi e di alcuni altri dettagli su cui si basa il teorema di Kolmogorov di costruzione dei processi (Sezione 1.2).

ii) processi gaussiani stazionari (Sezione 1.2.1).

iii) Dimostrazione delle Proposizioni 15 e 16 sui tempi di prima uscita (Sezioni 1.3.2 e 1.3.3).

iv) Probabilità condizionale (Sezione 1.4.2).

v) Processi di Markov: svolti solo la definizione e la Proposizione 21 (sui processi a incrementi indipendenti).

vi) Sezione 2.1.1 sul moto browniano.

vii) Sezione 3.3 sulle applicazioni delle martingale.

viii) Lemma 7 sulla convergenza della variazione quadratica delle martingale continue limitate (Sezione 3.7). Dimostrazione del Teorema 21, stessa sezione.

ix) Sezione 4.1.1 su integrali rispetto a martingale.

x) Dimostrazione del Teorema 28 (e Lemma 9) sugli integrali stocastici per processi Λ^2 (Sezione 4.3).

xi) Basta il passo 1 della dimostrazione della formula di Itô-Föllmer in più variabili.

xii) Integrale secondo Stratonovich (Sezione 5.1.2).

xiii) Solo cenni o aspetti operativi (di calcolo) circa le Sezione 5.2.1 sulla variazione quadratica dei vari processi, la Sezione 5.2.2 e la formula di Itô per processi di Itô (Teorema 3.3; senza dettagli della dimostrazione).

xiv) Sezione 7.1 sul legame con le PDE.