Istituzioni di Probabilità
Laurea magistrale in Matematica
11 luglio 2014

Esercizio 1. (*punti 9-10*) Una v.a. $X > 0$ si dice log-normale se la v.a. $\log X$ è gaussiana. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione, $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano.

1. Sia $(X_t)_{t\in[0,T]}$ un processo continuo e adattato che soddisfa q.c. la relazione

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s ds + \int_0^t X_s dB_s.$$

Mostrare che, per ogni $t > 0$, la v.a. X_t è log-normale. [Si possono usare fatti svolti a lezione, ma citandoli con precisione.]

Mostrare inoltre che, q.c., le traiettorie del processo $(X_t)_{t\in[0,T]}$ sono γ-hölderiane per ogni $\gamma \in (0, 1/2)$ e non sono γ-hölderiane per $\gamma \in (1/2, 1)$.

2. Stabilire se sia finito o infinito $E[X_t^n]$, al variare di $t \geq 0$ ed $n \in \mathbb{N}$. Trovare un'equazione differenziale soddisfatta da X_t^n. Calcolare $E[X_t^n]$.

3. Preso $\lambda > 0$, mostrare che il processo $Y_t = X_{\lambda t}$ risolve l'equazione

$$Y_t = 1 + \int_0^t \lambda Y_s ds + \int_0^t \lambda^{1/2} Y_s d\widetilde{B}_s.$$

rispetto ad un opportuno moto browniano $\widetilde{B}_t$.

Esercizio 2. (*punti 10-11*) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtrazione, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tre processi stocastici adattati. Supponiamo che la v.a. Z_n sia centrata e indipendente da $\mathcal{F}_{n-1}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

1. Supponiamo $Y_n = \sum_{i=0}^n Z_i$. Supponiamo X_n, Z_n integrabili, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che $M_n := \sum_{i=1}^n X_{i-1}(Y_i - Y_{i-1})$ è una martingala.

2a. Supponiamo $Y_n = \sum_{i=0}^n Z_i$, $M_n := \sum_{i=1}^n X_{i-1}(Y_i - Y_{i-1})$, Z_n integrabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Posto $\tau = \min\{n \geq 0 : |X_n| \geq 10\}$ ($\tau = +\infty$ se l'insieme è vuoto), mostrare che $(1_{n\leq\tau-1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(X_{n\wedge(\tau-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sono processi adattati.

2b. Mostrare poi che $(M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala.

3. Si rimuova l'ipotesi $Y_n = \sum_{i=0}^n Z_i$. Si supponga che X_n, Y_n siano di quadrato integrabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per quali processi Y vale che $M_n := \sum_{i=1}^n X_{i-1}(Y_i - Y_{i-1})$ è una martingala (indipendentemente dalla scelta di X)?

Esercizio 3. (*punti 10 circa*) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione, $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano. Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$X_t = 1 + \lambda t + 2\int_0^t \sqrt{|X_s|} dB_s \qquad (1)$$

con λ parametro ≥ 0. Si noti che essa non soddisfa le condizioni dei teoremi noti nel corso, quindi va studiata con metodi diversi.

1. Sia W_t un moto browniano in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Poniamo $X_t = \|W_t\|^2$, dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$. Mostrare che

$$B_t := \int_0^t \frac{W_s}{\sqrt{X_s}} \cdot dW_s$$

è un moto browniano. Si usi (senza dimostrarlo) il fatto che $W_t \neq 0$ per ogni $t > 0$, con probabilità uno (è un fatto vero, in dimensione $n \geq 2$). Si verifichi quindi che X_t soddisfa l'equazione (1) con $\lambda = n$ (ma con dato iniziale nullo).

2. Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ un processo continuo e di classe M_B^2 che soddisfa l'equazione (1). Supponiamo che $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione di classe C^2 tale che $H(X)$ sia una martingala. Che equazione deve soddisfare H? Più in generale, supponiamo che $H : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sia una funzione di classe C^2, eventualmente anche con $\lim_{x\to 0^+} H(x) = +\infty$. Preso $\varepsilon \in [0, 1]$, poniamo $\tau_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq \varepsilon\}$ ($\tau_\varepsilon = +\infty$ se l'insieme è vuoto). Giustificare (concettualmente, senza esplicite construzioni complicate) l'uso della formula di Itô per $H(X_{t\wedge\tau_\varepsilon})$ quando $\varepsilon > 0$ e trovare l'equazione che deve soddisfare H affinché $H(X_{t\wedge\tau_\varepsilon})$ sia una martingala per ogni $\varepsilon \in (0, 1]$.

3. Si consideri il caso $\lambda = 4$ e la funzione $H(x) = x^{-1}$. Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ un processo continuo e di classe M_B^2 che soddisfa l'equazione (1). Cercare di dare un'argomentazione il più convincente possibile del fatto che l'evento

$$A = \{\tau_0 < \infty\}$$

abbia probabilità nulla. Esprimere per lo meno l'intuizione.

1 Soluzioni

Esercizio 1.

1. Sol: $X_t = \exp(t/2 + B_t)$ per un esercizio visto nel corso (Lez. 32, vedi registro). Quindi è log-normale.

Circa la regolarità, lo sono per $\gamma < 1/2$ quelle del browniano, quindi per composizione anche quelle di X. Non lo sono per $\gamma > 1/2$ perché altrimenti, per composizione della X col logaritmo, lo sarebbe anche il browniano.

2. Finito per ogni n, per l'integrabilità esponenziale delle gaussiane. Vale

$$dX_t^n = d\exp(nt/2 + nB_t) = X_t^n \left(\frac{n}{2}dt + ndB_t + \frac{1}{2}n^2 dt \right) = \frac{n+n^2}{2} X_t^n dt + nX_t^n dB_t$$

quindi

$$X_t^n = 1 + \frac{n+n^2}{2} \int_0^t X_s^n ds + n \int_0^t X_s^n dB_s.$$

Da qui (usando l'integrabilità già stabilita)

$$E[X_t^n] = 1 + \frac{n+n^2}{2} \int_0^t E[X_s^n] ds$$

da cui

$$E[X_t^n] = \exp\left(\frac{n+n^2}{2} t \right).$$

3.

$$Y_t = X_{\lambda t} = \exp(\lambda t/2 + B_{\lambda t}) = \exp\left(\lambda t/2 + \lambda^{1/2} \widetilde{B}_t \right)$$

dove $\widetilde{B}_t := \lambda^{-1/2} B_{\lambda t}$ è, per un noto risultato, un moto browniano. Dalla formula di Itô discende poi (come vistoa lezione) che $\exp\left(\lambda t/2 + \lambda^{1/2} \widetilde{B}_t \right)$ soddisfa l'equazione

$$Y_t = 1 + \int_0^t \lambda Y_s ds + \int_0^t \lambda^{1/2} Y_s d\widetilde{B}_s.$$

Esercizio 2.

1. Vale $M_n := \sum_{i=0}^n X_{i-1} Z_i$. Siccome X_{i-1} e Z_i sono indipendenti, allora $X_{i-1} Z_i$ è integrabile sotto la sola ipotesi che lo siano i due fattori. Quindi M è integrabile. E' ovviamente adattata. Vale poi

$$\begin{aligned} E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[M_n + X_n Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n + X_n E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\ &= M_n + X_n E[Z_{n+1}] = M_n \end{aligned}$$

dove abbiamo usato varie proprietà note. Quindi M è una martingala.

2a. Il processo $1_{n\leq\tau-1}$ è adattato: basta verificare che l'evento $\{n \leq \tau - 1\}$ sta in $\mathcal{F}_n$:

$$\{n \leq \tau - 1\} = \{n + 1 \leq \tau\} = \{\tau \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$$

vero perché τ è un tempo d'arresto.

Anche il processo $X_{n\wedge(\tau-1)}$ è adattato: per ogni numero reale a vale

$$\begin{aligned}\left\{X_{n\wedge(\tau-1)} \leq a\right\} &= \cup_{i=0,\ldots,\infty} \left\{X_{n\wedge(\tau-1)} \leq a\right\} \cap \{\tau = i\} = \cup_{i=0,\ldots,\infty} \left\{X_{n\wedge(i-1)} \leq a\right\} \cap \{\tau = i\} \\ & \left(\cup_{i=0,\ldots,n} \{X_{i-1} \leq a\} \cap \{\tau = i\}\right) \cup \left(\{X_n \leq a\} \cap \{\tau > n\}\right)\end{aligned}$$

e tutti gli eventi di quest'ultima espressione stanno in $\mathcal{F}_n$.

2b. Vale (basta verificare le identità ω per ω)

$$M_{n\wedge\tau} = \sum_{i=0}^{n\wedge\tau} X_{i-1}Z_i = \sum_{i=0}^{n} 1_{i\leq\tau}X_{i-1}Z_i = \sum_{i=0}^{n} 1_{i\leq\tau}X_{(i-1)\wedge(\tau-1)}Z_i.$$

La prima identità deriva dalla definizione, la seconda dal fatto che entrambe le espressioni $\sum_{i=0}^{n\wedge\tau}$ e $\sum_{i=0}^{n} 1_{i\leq\tau}$ forniscono la somma fino al massimo tra n e τ, la terza dal fatto che, quando $i \leq \tau$ (cioè quando $1_{i\leq\tau} = 1$) vale anche $i-1 \leq \tau-1$, quindi $i-1 = (i-1)\wedge(\tau-1)$, quindi $X_{i-1} = X_{(i-1)\wedge(\tau-1)}$.

Il processo $M_{n\wedge\tau}$ è quindi della forma

$$M_{n\wedge\tau} = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{X}_{i-1}Z_i$$

dove $\widetilde{X}_{i-1} := 1_{i\leq\tau}X_{(i-1)\wedge(\tau-1)}$, ovvero $\widetilde{X}_n := 1_{n\leq\tau-1}X_{n\wedge(\tau-1)}$. Se il processo $\widetilde{X}$ è integrabile ed adattato, si applica il punto precedente. Adattato, è il punto 2a. L'integrabilità si riduce a quella di $X_{n\wedge(\tau-1)}$, che lo è perché $\left|X_{n\wedge(\tau-1)}\right| \leq 10$.

3. L'adattamento è ovvio. L'integrabilità ora segue dalla disuguaglianza di Hölder. Vale poi

$$E\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = E\left[M_n + X_n\left(Y_{n+1} - Y_n\right)|\mathcal{F}_n\right] = M_n + X_nE\left[Y_{n+1} - Y_n|\mathcal{F}_n\right]$$

quindi M è una martingala se lo è Y. E solo se lo è, altrimenti per $X = 1$ il processo M non è una martingala.

Esercizio 3.

1. Il processo $Y_t = \frac{W_t}{\sqrt{X_t}}$, $t > 0$, è ben definito, continuo e adattato, con $\|Y_t\| = 1$, quindi (estendendolo in modo arbitrario per $t = 0$) di classe M_W^2, pertanto B_t è una martingala. Vale inoltre

$$d\left[B\right]_t = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{W_t^i}{\sqrt{X_t}}\right)^2 dt = \frac{X_t}{X_t}dt = dt$$

e quindi B è moto browniano.

Vale allora

$$dX_t = 2W_t \cdot dW_t + ndt = 2\sqrt{X_t}\frac{W_t}{\sqrt{X_t}} \cdot dW_t + ndt = 2\sqrt{X_t}dB_t + ndt.$$

2. Vale

$$dX_t = \lambda dt + 2\sqrt{|X_t|}dB_t.$$

Allora, dalla formula di Itô, $\frac{1}{2}H''(x)\,4\,|x| + H'(x)\,\lambda = 0$, ovvero

$$2H''(x)\,|x| + H'(x)\,\lambda = 0.$$

Nel caso $H : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, si trova

$$2H''(x)\,x + H'(x)\,\lambda = 0.$$

Infatti, si può imaginare di considerare la funzione H ristretta a $[\varepsilon, \infty)$ e poi estenderla in modo C^∞ a tutto $\mathbb{R}$; chiamiamo H_ε una tale estensione. D'latra parte, il processo $X_{t\wedge\tau_\varepsilon}$ soddisfa l'identità

$$\begin{aligned} X_{t\wedge\tau_\varepsilon} &= 1 + \lambda\,(t \wedge \tau_\varepsilon) + 2\int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon} \sqrt{|X_s|}dB_s \\ &= 1 + \lambda\int_0^t 1_{s\leq\tau_\varepsilon} sds + 2\int_0^t 1_{s\leq\tau_\varepsilon}\sqrt{|X_{s\wedge\tau_\varepsilon}|}dB_s \end{aligned}$$

quindi è un processo di Itô e possiamo applicare la formula di Itô a $H_\varepsilon(X_{t\wedge\tau_\varepsilon})$; ma essa coincide con $H(X_{t\wedge\tau_\varepsilon})$ (perché il processo $X_{t\wedge\tau_\varepsilon}$, siccome parte da 1, ha valori in $[\varepsilon, \infty)$), quindi di fatto stiamo applicando la formula di Itô a $H(X_{t\wedge\tau_\varepsilon})$, come richiesto. Facendo i calcoli come nel caso regolare si trova $2H''(x)\,x + H'(x)\,\lambda = 0$.

3. Vale

$$\begin{aligned} H(x) &= x^{-1} \\ H'(x) &= -x^{-2} \\ H''(x) &= 2x^{-3} \end{aligned}$$

quindi, per $\lambda = 4$

$$2H''(x)\,x + H'(x)\,\lambda = 4x^{-2} - 4x^{-2} = 0.$$

Pertanto il processo $Z_t^\varepsilon = X_{t\wedge\tau_\varepsilon}^{-1}$ è una martingala. Pertanto

$$E[Z_t^\varepsilon] = E[Z_0^\varepsilon] = E\left[X_0^{-1}\right] = 1$$

ovvero

$$E\left[X_{t\wedge\tau_\varepsilon}^{-1}\right] = 1.$$

Supponiamo per assurdo che l'insieme $A = \{\tau_0 < \infty\}$ abbia probabilità positiva. Per $\omega \in A$, quanto t è molto grande ed ε è molto piccolo, $X^{-1}_{t\wedge\tau_\varepsilon}(\omega) = \frac{1}{\varepsilon}$, incompatibile con $E\left[X^{-1}_{t\wedge\tau_\varepsilon}\right] = 1$. Rigorosamente,

$$E\left[1_A X^{-1}_{\tau_\varepsilon}\right] = E\left[1_A \lim_{t\to\infty} X^{-1}_{t\wedge\tau_\varepsilon}\right] \leq \liminf E\left[1_A X^{-1}_{t\wedge\tau_\varepsilon}\right] \leq \liminf E\left[X^{-1}_{t\wedge\tau_\varepsilon}\right] = 1$$

ma

$$E\left[1_A X^{-1}_{\tau_\varepsilon}\right] = \frac{1}{\varepsilon} P(A)$$

ovvero

$$P(A) \leq \varepsilon$$

da cui $P(A) = 0$ per l'arbitrarietà di ε.