**Istituzioni di Probabilità**
Laurea magistrale in Matematica
prova scritta del 20/6/2013

**Exercise 1.** *(punti 8 circa) Sia* $W$ *un moto browniano reale. Sia* $\varphi : [0,+\infty[ \to [0,+\infty[$ *una funzione crescente, sia* $c : [0,+\infty[ \to [0,+\infty[$ *una funzione misurabile; si assuma che* $\varphi$ *e* $c$ *siano strettamente positive su* $]0,+\infty[$ *e che* $\varphi(0) = 0$.

1. *Si dimostri che, se* $\varphi$ *è* $\alpha$*-hölderiana su ogni insieme limitato di* $[0,+\infty[$, *allora il processo* $X(t) = W(\varphi(t))$ *è* $\beta$*-hölderiano, su ogni insieme limitato di* $[0,+\infty[$, *per ogni* $\beta < \alpha/2$.

2. *Ipotizziamo che* $Y(t) = c(t)W(\varphi(t))$ *sia un moto browniano (rispetto alla sua filtrazione naturale). Si dimostri che, per ogni* $0 < s \le t$, $c(t) = \frac{s}{c(s)\varphi(s)}$ *e si deduca che esiste* $C > 0$ *tale che, per ogni* $t$, $c(t) = C$, $\varphi(t) = t/C^2$.

**Exercise 2.** *(punti 11 circa) Sia* $M = (M_n)_n$ *una supermartingala nonnegativa (rispetto ad una filtrazione* $(\mathcal{F}_t)_t$*), con* $M_0$ *costante e tale che* $M_{n+1} - M_n \le C$ *per ogni* $n$, *per qualche* $C > 0$. *Fissato* $\lambda > M_0$ *ed* $N \ge 1$ *si ponga* $\tau = \inf\{n | M_n > \lambda\} \wedge N$ *(tempo d'arresto* $\ge 1$, *con associata* $\sigma$*-algebra* $\mathcal{F}_\tau$*).*

1. *Si dimostri che, su* $\{M_\tau > \lambda\}$, $M_\tau \le C+\lambda$ *e si deduca che* $P\left(\sup_{n=0,\dots,N} M_n > \lambda\right) \ge \frac{1}{C+\lambda}\int_{M_\tau > \lambda} M_\tau dP$.

2. *Si dimostri (dalla definizione di* $\mathcal{F}_\tau$*) che l'evento* $\{M_\tau > \lambda\}$ *appartiene a* $\mathcal{F}_\tau$.

3. *Si dimostri che* $P\left(\sup_{n=0,\dots,N} M_n > \lambda\right) \ge \frac{1}{C+\lambda}\int_{M_\tau > \lambda} M_N dP$.

**Exercise 3.** *(punti 11 circa) Si consideri la seguente SDE,*

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1+X_t^2}\,dB_t, \quad X_0 = 0,$$

*dove* $B_t$ *è un moto browniano reale.*

1. *Si discuta esistenza ed unicità delle soluzioni.*

2. *Si dimostri che* $\sinh(B_t)$ *è la soluzione* ($\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$*).*

3. *Siano ora* $W_1, W_2$ *due moti browniani reali indipendenti, e si consideri il processo*

$$Z_t = \exp(W_1(t)) \int_0^t \exp(-W_1(s))\,dW_2(s).$$

*Usando il fatto (teorema di Lévy) che*

$$dW_3(t) = \frac{Z_t dW_1(t) + dW_2(t)}{\sqrt{1+Z_t^2}}$$

*definisce un altro moto browniano, si concluda che* $Z_t$ *risolve la stessa equazione di* $X_t$, *ma rispetto ad un differente moto browniano.*

# 1 Soluzioni

**Esercizio 1**.

i) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ lo spazio su cui è definito $W$. Esiste un insieme misurabile $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ con $P(\Omega_0) = 1$, con la seguente proprietà: per ogni $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, ogni $T > 0$ ed ogni $\omega \in \Omega_0$ esiste una costante $C_{\gamma,T}(\omega) > 0$ tale che

$$|W(a,\omega) - W(b,\omega)| \leq C_{\gamma,T}(\omega) \, |a-b|^{\gamma} \qquad \text{per ogni } a, b \in [0,T] \, .$$

Quindi

$$\begin{aligned}|X(t,\omega) - X(s,\omega)| &= |W(\varphi(t),\omega) - W(\varphi(s),\omega)| \\ &\leq C_{\gamma,\varphi(T)}(\omega) \, |\varphi(t) - \varphi(s)|^{\gamma} \qquad \text{per ogni } s, t \in [0,T] \, .\end{aligned}$$

Da qui si deduce

$$|X(t,\omega) - X(s,\omega)| \leq C_{\gamma,\varphi(T)}(\omega) \, |t-s|^{\alpha\gamma} \qquad \text{per ogni } s, t \in [0,T] \, .$$

Questo mostra che $X$ ha traiettorie q.c. hölderiane di esponente $\alpha\gamma$, per qualsiasi $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, quindi $\beta$-hölderiane per ogni $\beta < \alpha/2$.

ii) Dev'essere, per $0 < s \leq t$, $E[Y(t)Y(s)] = s$, ovvero

$$E[c(t)W(\varphi(t))c(s)W(\varphi(s))] = s$$

che significa $c(t)c(s)E[W(\varphi(t))W(\varphi(s))] = s$ ed ancora $c(t)c(s)\varphi(s) = s$. Questa è la strada più breve. Oppure, innanzi tutto $E\left[Y(t)^2\right] = t$, ovvero $E\left[c(t)^2 W(\varphi(t))^2\right] = t$, ma

$$E\left[c(t)^2 W(\varphi(t))^2\right] = c(t)^2 \varphi(t)$$

quindi $c(t)^2\varphi(t) = t$. Poi dev'essere $E\left[(Y(t) - Y(s))^2\right] = t - s$, ovvero

$$E\left[(c(t)W(\varphi(t)) - c(s)W(\varphi(s)))^2\right] = t - s$$

ma

$$E\left[(c(t)W(\varphi(t)) - c(s)W(\varphi(s)))^2\right] = c(t)^2\varphi(t) + c(s)^2\varphi(s) - 2c(t)c(s)\varphi(s)$$

quindi

$$c(t)^2\varphi(t) + c(s)^2\varphi(s) - 2c(t)c(s)\varphi(s) = t - s.$$

Unendo al condizione precedente, troviamo

$$t + s - 2c(t)c(s)\varphi(s) = t - s$$

ovvero

$$c(t)c(s)\varphi(s) = s$$

cioè $c(t) = \frac{s}{c(s)\varphi(s)}$.

Questo implica $\frac{dc(t)}{dt} = 0$ (su $(s, \infty)$, e quindi su $(0, \infty)$ con facile ragionamento). Ne segue che esiste $C > 0$ tale che $c(t) = C$. Quindi $\varphi(s) = s/C^2$.

**Esercizio 2**.

i) Useremo spesso il fatto che $\{M_\tau > \lambda\} = \{\sup_{n=0,\ldots,N} M_n > \lambda\}$. Abbiamo $M_{\tau-1} \leq \lambda$ (si ricordi che $\tau \geq 1$), quindi dalla relazione $M_{n+1}(\omega) - M_n(\omega) \leq C$ (q.c.) deriva

$$M_\tau(\omega) \leq M_{\tau-1}(\omega) + C \leq C + \lambda \qquad q.c.$$

Quindi

$$\int_{M_\tau > \lambda} M_\tau dP \leq (C+\lambda) P(M_\tau > \lambda) = (C+\lambda) P\left(\sup_{n=0,\ldots,N} M_n > \lambda\right).$$

ii) Dobbiamo verificare che $\{M_\tau > \lambda\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ per ogni $t \geq 0$ intero non negativo (vale inoltre $\{M_\tau > \lambda\} \in \mathcal{F}_\infty$, tralasicamo la verifica). Per $t \leq N$ vale

$$\{M_\tau > \lambda\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\sup_{n=0,\ldots,t} M_n > \lambda\}$$

(si verifica facilmente la doppia inclusione) quindi appartiene a $\mathcal{F}_t$. Se $t > N$,

$$\{M_\tau > \lambda\} = \{\sup_{n=0,\ldots,N} M_n > \lambda\} \in \mathcal{F}_N \subset \mathcal{F}_t$$

ed anche $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, quindi $\{M_\tau > \lambda\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

iii) Proponiamo due dimostrazioni. La prima, basata sulla proprietà di supermartingala ed un corollario del teorema d'arresto ($M_\tau \geq E[M_N|\mathcal{F}_\tau]$), più il risultato del punto (ii), consiste nelle disuguaglianze

$$\int_{M_\tau > \lambda} M_\tau dP \geq \int_{M_\tau > \lambda} E[M_N|\mathcal{F}_\tau]\, dP = \int_{M_\tau > \lambda} M_N dP$$

da cui discende la tesi.

La seconda, basata sul teorema d'arresto, inizia osservando che per la proprietà di supermartingala, essendo il tempo $\tau$ limitato,

$$E[M_N] \leq E[M_\tau].$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\int_{M_\tau > \lambda} M_N dP &= E[M_N] - \int_{M_\tau \leq \lambda} M_N dP \\ &\leq E[M_\tau] - \int_{M_\tau \leq \lambda} M_N dP \\ &= \int_{M_\tau > \lambda} M_\tau dP + \int_{M_\tau \leq \lambda} (M_\tau - M_N)\, dP \\ &= \int_{M_\tau > \lambda} M_\tau dP\end{aligned}$$

perché su $\{M_\tau \leq \lambda\}$ vale $M_\tau = M_N$. Basta ora usare il punto 1.

**Esercizio 3**.

i) I coefficienti sono globalmente lipschitziani. Per il drift, l'affermazione è ovvia. Per il coefficiente di diffusione $\sigma(x) = \sqrt{1+x^2}$ abbiamo che

$$\left|\sigma'(x)\right| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$$

quindi anche $\sigma$ è globalmente lipschitziana. Allora si applica un teorema noto.

ii) Posto $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, è ben noto che vale $f'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $f''(x) = \sinh(x)$. Quindi, per la formula di Itô,

$$d\sinh(B_t) = \cosh(B_t)dB_t + \frac{1}{2}\sinh(B_t)dt.$$

Vale poi $\cosh(x) = \sqrt{1+\sinh(x)^2}$, quindi $X_t := \sinh(B_t)$ è soluzione, e per unicità è la soluzione. Per maggior precisione, avendo nel corso dimostrato il teorema di unicità nella classe delle soluzioni di quadrato integrabile, verifichiamo che $X_t := \sinh(B_t)$ lo sia. Vale $X_t^2 \leq \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} \leq \frac{e^{2x}+1}{2}$, quindi dobbiamo verificare che $E\left[e^{2B_t}\right]$ sia finito (uniformemente in $t \in [0,T]$) e questo è vero per l'integrabilità esponenziale delle v.a. gaussiane (svolgendo il conto si vede subito l'uniformità in $t$).

iii) Intanto, come nota a margine, si applica il teorema di Lévy a $W_3(t)$ in quanto $W_3(t)$ è una martingala (è integrale stocastico di un processo che si verifica facilmente stare in $M^2$, essendo maggiorato da $Z_t + 1$, che ci sta - di nuovo per integrabilità esponenziale delle gaussiane) e la sua variazione quadratica è

$$[W_3, W_3]_t = \int_0^t \frac{Z_s^2}{1+Z_s^2}ds + \int_0^t \frac{1}{1+Z_s^2}ds = t.$$

Verifichiamo ora che $Z_t$ risolve la stessa equazione, con un nuovo moto browniano. Abbiamo $Z_t = Z_t^{(1)} Z_t^{(2)}$, con $Z_t^{(1)} = \exp(W_1(t))$,

$$dZ_t^{(1)} = Z_t^{(1)} dW_1(t) + \frac{1}{2} Z_t^{(1)} dt$$

e $Z_t^{(2)} = \int_0^t \exp(-W_1(s))dW_2(s)$, ovvero $dZ_t^{(2)} = \exp(-W_1(t))dW_2(t)$, quindi

$$\begin{aligned}
dZ_t &= Z_t^{(1)} dZ_t^{(2)} + Z_t^{(2)} dZ_t^{(1)} + d\left[Z^{(1)}, Z^{(2)}\right]_t \\
&= Z_t^{(1)} \exp(-W_1(t))dW_2(t) + Z_t^{(2)} Z_t^{(1)} dW_1(t) + Z_t^{(2)} \frac{1}{2} Z_t^{(1)} dt + 0 \\
&= dW_2(t) + Z_t dW_1(t) + \frac{1}{2} Z_t dt
\end{aligned}$$

ed infine

$$Z_t dW_1(t) + dW_2(t) = \sqrt{1+Z_t^2}\frac{Z_t dW_1(t) + dW_2(t)}{\sqrt{1+Z_t^2}} = \sqrt{1+Z_t^2} dW_3(t),$$

quindi

$$dZ_t = \frac{1}{2}Z_t dt + \sqrt{1+Z_t^2}dW_3(t).$$

Il nuovo moto browniano è $W_3$.

1.