Istituzioni di Probabilità
Laurea magistrale in Matematica
15 Gennaio 2015

Esercizio 1. (*punti 10*) Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = -X_t dt + dB_t, \qquad X_0 = x_0.$$

i) Si dimostri che

$$X_t = B_t + e^{-t}\left(x_0 - \int_0^t e^s B_s ds\right) \tag{1}$$

è l'unica soluzione. Si imposti la verifica che tale soluzione è un processo gaussiano.

ii) Mostrare che $X_t = \widetilde{X}_t$ (nel senso di processi indistinguibili) dove

$$\widetilde{X}_t = e^{-t}\left(x_0 + \int_0^t e^s dB_s\right). \tag{2}$$

Possibilmente, si risponda alla domanda in due modi: sia usando direttamente le definizioni (1) e (2), sia passando per l'equazione da esse soddisfatta.

iii) Calcolare media e varianza di X_t. Si verifichi inoltre che

$$E\left[\int_0^t e^s B_s ds \int_0^t e^r B_r dr\right] = 2\int_0^t e^r \left(\int_0^r e^s s ds\right) dr$$

e si mostri come questo potrebbe produrre un'altra via per il calcolo di $Var[X_t]$ (non completare i calcoli, troppo lunghi).

iv) Determinare che grado di hölderianità ha X_t. [Sugg.: pensare ad una soluzione veloce.]

Esercizio 2. (*punti 10*) Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti, di Bernoulli, con $P(X_n = 1) = p_n$, $P(X_n = 0) = 1 - p_n$, dove $p_n \in [0,1]$. Poniamo $N_n = X_1 + ... + X_n$ per $n \geq 1$, $N_0 = 0$. Si osservi che è una sorta di processo di Poisson a tempo discreto: parte da zero, assume valori interi non negativi, aumentando ogni tanto di un'unità. Per ogni $n \geq 1$, sia $\mathcal{F}_n$ la σ-algebra associata alle v.a. $X_1, ..., X_n$ e sia $\mathcal{F}_0$ la σ-algebra banale.

i) Verificare che $(N_n)_{n\geq 0}$ *non* è una martingala (in generale). Si chiama *compensatore* (deterministico) una successione $(a_n)_{n\geq 0}$ tale che $(N_n - a_n)_{n\geq 0}$ sia una martingala, nulla per $n = 0$. Trovare un compensatore e mostrare che è unico.

ii) Mostrare che $(N_n - a_n)^2$ non è una martingala, in generale, e trovare un suo compensatore (deterministico).

iii) Se τ è un tempo d'arresto a valori interi non negativi, con $E[\tau^2] < \infty$, mostrare che $E[\sup_n N^2_{n\wedge\tau}] < \infty$. Si usi la disuguaglianza $x^2 \leq 2(x-y)^2 + 2y^2$ (che discende da $|x| \leq |x-y| + |y|$).

Esercizio 3. (*punti 10*) Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità su cui è definita una successione $B^1_t, ..., B^N_t, ...$ di moti browniani indipendenti. Sia $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana e limitata con $K(0) = 0$. Per ogni $N \in \mathbb{N}$, consideriamo il sistema di N equazioni stocastiche

$$dX_t^{i,N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} K\left(X_t^{i,N} - X_t^{j,N}\right) dt + dB_t^i, \qquad X_0^{i,N} = 0, \qquad i = 1, ..., N.$$

i) Mostrare che, per ogni $N \in \mathbb{N}$, il sistema ha una ed una soluzione forte.

ii) Per ogni $t \geq 0$ e per quasi ogni $\omega \in \Omega$ indichiamo con $\mu_t^N(\omega)$ la misura di probabilità sui boreliani di $\mathbb{R}$ data da $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_t^{i,N}(\omega)}$, ovvero definita da

$$\mu_t^N(\omega)(B) = \frac{Card\left\{i = 1, ..., N : X_t^{i,N}(\omega) \in B\right\}}{N}$$

al variare dei boreliani B di $\mathbb{R}$. Scriveremo nel seguito μ_t^N; questo è, in un senso opportuno che non serve qui precisare, un processo stocastico a valori nello spazio delle misure di probabilità. Presa una funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare a supporto compatto, si consideri il processo stocastico a valori reali $\left\langle \mu_t^N, \phi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, \mu_t^N(dx)$. Dimostrare che

$$\begin{aligned}\left\langle \mu_t^N, \phi \right\rangle = \left\langle \mu_0^N, \phi \right\rangle &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\, K(x-y)\, \mu_s^N(dx)\, \mu_s^N(dx)\, ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \left\langle \mu_s^N, \phi'' \right\rangle ds + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \int_0^t \phi'\left(X_s^{i,N}\right) dB_s^i.\end{aligned}$$

iii) Esaminiamo ora il caso particolare $K = 0$. Indicare con μ_t la legge, sui sui boreliani di $\mathbb{R}$, di un moto browniano. Mostrare che, per ogni t fissato, la successione di v.a. $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \int_0^t \phi'\left(X_s^{i,N}\right) dB_s^i$ converge a zero in media quadratica e la successione di v.a. $\left\langle \mu_t^N, \varphi \right\rangle$ converge q.c. a $\langle \mu_t, \varphi \rangle$, per ogni funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ regolare a supporto compatto. Dedurre che

$$\langle \mu_t, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \left\langle \mu_s, \phi'' \right\rangle ds.$$

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) La soluzione esiste ed è unica, nel senso forte, perché i coefficienti sono lipschitziani. Basta quindi verificare che quella data è soluzione. Vale

$$\begin{aligned} dX_t &= dB_t - e^{-t}\left(x_0 - \int_0^t e^s B_s ds\right) dt - e^{-t}\left(e^t B_t dt\right) \\ &= dB_t - X_t dt. \end{aligned}$$

Per la gaussianità, bisogna verificare che, presi $t_1 < ... < t_n$, il vettore $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ è gaussiano. Approssimando l'integrale con somme di Riemann, si vede che il vettore approssimante $\left(X_{t_1}^k, ..., X_{t_n}^k\right)$ è gaussiano perché trasformazione lineare di un vettore gaussiano (una distribuzione di dimensione finita del moto browniano); poi si passa al limite in media quadratica, conservando la gaussianità.

ii) Per la formula di Itô,

$$d\left(e^s B_s\right) = e^s B_s ds + e^s dB_s$$

ovvero

$$e^t B_t = \int_0^t e^s B_s ds + \int_0^t e^s dB_s$$

da cui

$$B_t = e^{-t}\int_0^t e^s B_s ds + e^{-t}\int_0^t e^s dB_s.$$

Sostituendo nella (1) si trova (2).

Il secondo metodo richiede di verificare che $\widetilde{X}_t$ soddisfa l'equazione (tramite la formula di Itô) ed usare l'unicità.

iii) Il conto a partire da (1) è lunghissimo ed è appunto quello indicato nella seconda parte della domanda. Invece, troviamo che $E\left[\widetilde{X}_t\right] = e^{-t}x_0$ immediatamente da (2) (l'integrale stocastico è un'ovvia martingala) e

$$Var\left[\widetilde{X}_t\right] = e^{-2t}E\left[\left(\int_0^t e^s dB_s\right)^2\right] = e^{-2t}\int_0^t e^{2s} ds = \frac{1}{2}e^{-2t}\left(e^{2t}-1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Alternativamente, usando la (1), avremmo

$$\begin{aligned} Var\left[X_t\right] &= E\left[\left(X_t - e^{-t}x_0\right)^2\right] = E\left[\left(B_t - e^{-t}\int_0^t e^s B_s ds\right)^2\right] \\ &= E\left[B_t^2\right] + e^{-2t}E\left[\int_0^t e^s B_s ds \int_0^t e^r B_r dr\right] - 2e^{-t}E\left[B_t \int_0^t e^s B_s ds\right] \\ &= t + 2e^{-2t}\int_0^t e^r\left(\int_0^r e^s s ds\right) dr - 2e^{-t}\int_0^t e^s\left(t \wedge s\right) ds \end{aligned}$$

dove poi $\int_0^t e^s (t \wedge s)\, ds = \int_0^t e^s s ds$. Per arrivare qui va verificata l'identità della domanda:

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t e^s B_s ds \int_0^t e^r B_r dr\right] &= \int_0^t e^r \left(\int_0^t e^s (s \wedge r)\, ds\right) dr \\ &= \int_0^t e^r \left(\int_0^r e^s s ds + \int_r^t e^s r ds\right) dr \\ &= 2\int_0^t e^r \left(\int_0^r e^s s ds\right) dr \end{aligned}$$

perché (si disegni la regione $r, s \in [0,t]$ con $r \leq s \leq t$) $\int_0^t \left(\int_r^t e^r e^s r ds\right) dr = \int_0^t \left(\int_0^s e^r e^s r dr\right) ds$.

iv) E' quello del browniano, perché i due processi differiscono per un processo differenziabile.

Esercizio 2. i) Per ricorrenza, $(N_n)_{n\geq 1}$ è adattato e integrabile. Vale, per $n \geq 1$,

$$E[N_n|\mathcal{F}_{n-1}] = E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] + N_{n-1} = E[X_n] + N_{n-1} = p_n + N_{n-1}.$$

Quindi $(N_n)_{n\geq 0}$ è una martingala solo se $p_n = 0$ per ogni n, cioè se è identicamente nulla.

Se poniamo $a_n = p_1 + ... + p_n$ per $n \geq 1$, $a_0 = 0$, allora, per $n \geq 1$,

$$E[N_n - a_n|\mathcal{F}_{n-1}] = p_n + N_{n-1} - a_n = N_{n-1} - a_{n-1}$$

quindi $(a_n)_{n\geq 1}$ è un compensatore. Viceversa, se $(a_n)_{n\geq 1}$ è un compensatore, allora, per $n \geq 1$,

$$E[N_n - a_n|\mathcal{F}_{n-1}] = N_{n-1} - a_{n-1}$$

ma $E[N_n - a_n|\mathcal{F}_{n-1}] = p_n + N_{n-1} - a_n$, quindi

$$a_n = a_{n-1} + p_n.$$

Unitamente al fatto che dev'essere $a_0 = 0$ (per essere un compensatore), la successione $(a_n)_{n\geq 1}$ è univocamente determinata.

ii) Poniamo $Y_n = X_n - p_n$ per $n \geq 1$, $Y_0 = 0$, così abbiamo $N_n - a_n = Y_1 + ... + Y_n$ per $n \geq 1$. Vale

$$\begin{aligned} E\left[(N_n - a_n)^2 |\mathcal{F}_{n-1}\right] &= E\left[(Y_1 + ... + Y_n)^2 |\mathcal{F}_{n-1}\right] = E\left[\sum_{ij=1}^n Y_i Y_j |\mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= \sum_{ij=1}^{n-1} Y_i Y_j + E\left[Y_n^2 + 2Y_n \sum_{i=1}^{n-1} Y_i |\mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= (N_{n-1} - a_{n-1})^2 + E\left[Y_n^2\right] + 2\sum_{i=1}^{n-1} Y_i E[Y_n] \\ &= (N_{n-1} - a_{n-1})^2 + p_n (1 - p_n) \end{aligned}$$

in quanto $E[Y_n]=0$,

$$E\left[Y_n^2\right]=(1-p_n)^2 p_n+p_n^2(1-p_n)=p_n(1-p_n).$$

In definitiva, scopriamo che di nuovo $(N_n-a_n)^2$ non è una martingala e (modulo il fatto ovvio che è integrabile ed adattata)

$$b_n=\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)$$

è un compensatore.

iii) Il processo $N_{n\wedge\tau}-a_{n\wedge\tau}$ è una martingala, quindi per la disuguaglianza di Doob

$$\begin{aligned}E\left[\sup_{n\leq M}(N_{n\wedge\tau}-a_{n\wedge\tau})^2\right] &\leq 4E\left[(N_{M\wedge\tau}-a_{M\wedge\tau})^2\right]\\ &=4E\left[(N_{M\wedge\tau}-a_{M\wedge\tau})^2-b_{M\wedge\tau}\right]+4E[b_{M\wedge\tau}]\\ &=4E[b_{M\wedge\tau}]\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che anche $(N_{n\wedge\tau}-a_{n\wedge\tau})^2-b_{n\wedge\tau}$ è una martingala, nulla in zero. Siccome

$$E\left[\sup_{n\leq M}N_{n\wedge\tau}^2\right]\leq 2E\left[\sup_{n\leq M}(N_{n\wedge\tau}-a_{n\wedge\tau})^2\right]+2E\left[\sup_{n\leq M}a_{n\wedge\tau}^2\right]$$

basta dimostrare che esiste una costante $C>0$ tale che $E[b_{M\wedge\tau}]\leq C$ e $E\left[a_{M\wedge\tau}^2\right]\leq C$ indipendentemente da M, ed applicare il teorema di convergenza monotona. Vale $b_n=\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)\leq n$, $a_n\leq n$, quindi

$$\begin{aligned}E[b_{M\wedge\tau}]&\leq E[M\wedge\tau]\leq E[\tau]<\infty\\ E\left[a_{M\wedge\tau}^2\right]&\leq E\left[(M\wedge\tau)^2\right]\leq E\left[\tau^2\right]<\infty.\end{aligned}$$

Esercizio 3. i) Posto $X_t=\left(X_t^{1,N},...,X_t^{N,N}\right)$, l'equazione per X_t, equazione differenziale stocastica in $\mathbb{R}^N$, ha la forma

$$dX_t=b(X_t)\,dt+dB_t$$

dove B_t è un moto browniano in $\mathbb{R}^N$ e $b:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ ha componenti

$$b_i(x_1,...,x_n)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(x_i-x_j).$$

Vale, posto $x=(x_1,...,x_n)$, $x'=(x'_1,...,x'_n)$

$$\begin{aligned}\left|b_i(x)-b_i(x')\right| &\leq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|K(x_i-x_j)-K\left(x'_i-x'_j\right)\right| \\ &\leq \frac{L_K}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_i-x_j-\left(x'_i-x'_j\right)\right| \\ &\leq L_K\left|x_i-x'_i\right|+\frac{L_K}{N}\sum_{j=1}^{N}\left|x_j-x'_j\right| \\ &\leq C_N\left\|x-x'\right\|\end{aligned}$$

quindi b è lipschitziano e per un noto teorema abbiamo esistenza ed unicità forte.

ii) Per la formula di Itô,

$$\begin{aligned}d\phi\left(X_t^{i,N}\right) &= \phi'\left(X_t^{i,N}\right)dX_t^{i,N}+\frac{1}{2}\phi''\left(X_t^{i,N}\right)dt \\ &= \phi'\left(X_t^{i,N}\right)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K\left(X_t^{i,N}-X_t^{j,N}\right)dt+\phi'\left(X_t^{i,N}\right)dB_t^i+\frac{1}{2}\phi''\left(X_t^{i,N}\right)dt.\end{aligned}$$

Vale $\left\langle\mu_t^N,\phi\right\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi\left(X_t^{i,N}\right)$, quindi

$$\begin{aligned}d\left\langle\mu_t^N,\phi\right\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi'\left(X_t^{i,N}\right)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}K\left(X_t^{i,N}-X_t^{j,N}\right)dt+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi'\left(X_t^{i,N}\right)dB_t^i+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\phi''\left(X_t^{i,N}\right)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\phi'(x)K(x-y)\mu_t^N(dx)\mu_t^N(dx)+\frac{1}{2}\left\langle\mu_t^N,\phi''\right\rangle dt+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi'\left(X_t^{i,N}\right)dB_t^i.\end{aligned}$$

iii)

$$E\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_0^t\phi'\left(X_s^{i,N}\right)dB_s^i\right|^2\right]=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}E\left[\int_0^t\phi'\left(X_s^{i,N}\right)dB_s^i\int_0^t\phi'\left(X_s^{j,N}\right)dB_s^j\right].$$

I termini misti sono nulli, per una nota formula. Quindi

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}E\left[\left(\int_0^t\phi'\left(X_s^{i,N}\right)dB_s^i\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}E\left[\int_0^t\left|\phi'\left(X_s^{i,N}\right)\right|^2ds\right]\leq\frac{1}{N}t\left\|\phi'\right\|_\infty\to 0.\end{aligned}$$

Osserviamo poi che i processi $X_t^{i,N} = B_t^i$ sono moti browniani indipendenti, quindi

$$\left\langle \mu_t^N, \varphi \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi \left(X_t^{i,N} \right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varphi \left(B_t^i \right)$$

converge q.c. (per la legge forte dei grandi numeri) a

$$E \left[\varphi \left(B_t^i \right) \right] = \int_{\mathbb{R}} \varphi \left(x \right) \mu_t \left(dx \right) = \left\langle \mu_t, \varphi \right\rangle .$$

Dall'identità

$$\left\langle \mu_t^N, \phi \right\rangle = \left\langle \mu_0^N, \phi \right\rangle + \frac{1}{2} \int_0^t \left\langle \mu_s^N, \phi'' \right\rangle ds + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \phi' \left(X_s^{i,N} \right) dB_s^i$$

deduciamo la tesi, per convergenza in probabilità di ogni termine. A quest'ultimo proposito osserviamo che la convergenza in media quadratica implica quella in probabilità (riferita a $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \phi' \left(X_s^{i,N} \right) dB_s^i$), quella q.c. implica quella in probabilità (riferita a $\left\langle \mu_t^N, \phi \right\rangle$ e $\left\langle \mu_0^N, \phi \right\rangle$) ed infine la convergenza ω-q.c. di $\left\langle \mu_s^N, \phi'' \right\rangle$ a $\left\langle \mu_s, \phi'' \right\rangle$ ($\varphi = \phi''$), per ogni s, implica la convergenza (s, ω)-q.c. di $\left\langle \mu_s^N, \phi'' \right\rangle$ a $\left\langle \mu_s, \phi'' \right\rangle$, quindi la convergenza s-q.c., per q.o. ω (per Fubini-Tonelli); siccome $\left\langle \mu_s^N, \phi'' \right\rangle$ è uniformemente limitato da $\left\| \phi'' \right\|_\infty$, per il teorema di convergenza dominata si ottiene che $\int_0^t \left\langle \mu_s^N, \phi'' \right\rangle ds$ converge ω-q.c. a $\int_0^t \left\langle \mu_s, \phi'' \right\rangle ds$, quindi anche in probabilità.