Istituzioni di Probabilità
Laurea magistrale in Matematica
prova scritta del 14/2/2013

Exercise 1. *(punti 9+) Sia* $X = (X(t,x))_{t,x}$ *un processo stocastico a valori reali, avente come parametro la coppia* $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$. *Supponiamo che* X *sia gaussiano, con media* $m(t,x) = E[X(t,x)] = x$ *e covarianza*

$$C(t,s,x,y) = E[(X(t,x) - x)(X(s,y) - y)] = (t \wedge s) \exp\left(-|x-y|^2\right).$$

Supponiamo inoltre che valga $X(0,x) = x$ *q.c., per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Si dimostri che, per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *il processo* $t \mapsto X(t,x) - x$ *è un moto browniano.*
2. *Si dimostri che, per ogni* $h \in \mathbb{R}$, *il processo* $Y(t,x) := X(t,x+h) - h$ *ha la stessa legge di* X.
3. *Si verifichi che*

$$E\left[|X(t,x) - X(s,y)|^2\right] \le C|t-s| + C'|x-y|^2$$

   per opportune costanti positive C, C'.
4. *(facoltativo) Si dimostri che esiste una modificazione a traiettorie continue in* (t,x).

Exercise 2. *(punti 13) Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *uno spazio di probabilità e* $(\mathcal{F}_n)_n$ *una filtrazione. Sia* $Y = (Y_n)_n$ *un processo adattato, con ciascuna* Y_n *non negativa e limitata. Poniamo*

$$X_0 = 0, \qquad X_n = \sum_{j=1}^n Y_j \qquad \text{per } n \ge 1$$

$$A_0 = 0, \qquad A_n = \sum_{j=1}^n E[Y_j | \mathcal{F}_{j-1}] \qquad \text{per } n \ge 1$$

$$Z_n = X_n - A_n.$$

1. *Si dimostri che* X *è una submartingala (rispetto a* $(\mathcal{F}_n)_n$*) e che* Z *è una martingala.*
2. *Per* $a > 0$ *sia* $\tau_a = \min\{n \ge 0 : A_{n+1} \ge a\}$ *se l'insieme non è vuoto,* $\tau_a = \infty$ *altrimenti. Si dimostri che* τ_a *è un tempo d'arresto, rispetto a* $(\mathcal{F}_n)_n$.
3. *Si dimostri che* $Z_{n \wedge \tau_a} \ge -a$.
4. *Si deduca che, sull'insieme in cui* A *converge,* Z *e quindi* X *convergono q.c. (si ricordi che* $Z_{n \wedge \tau_a}$ *è una martingala).*

5. Sia $(B_j)_j$ una successione di eventi di Ω tali che $\left(1_{B_j}\right)_j$ è un processo adattato. Sia Ω_0 l'insieme in cui converge la serie $\sum_j E\left[1_{B_j}|\mathcal{F}_{j-1}\right]$. Allora, per quasi ogni $\omega \in \Omega_0$, vale $\omega \in B_j$ solo per un numero finito di indici j.

Exercise 3. *(punti 8) Si consideri la seguente equazione differenziale uni-dimensionale:*

$$dX_t = -f'(X_t)\,dt + \sigma f'(X_t)\,dB_t, \qquad X_0 = x_0$$

dove x_0 *e* σ *sono numeri reali,* $f \in C^2(\mathbb{R})$*, con* $f \geq 0$ *ed entrambe* $|f'(x)|$ *ed* $|f''(x)|$ *uniformemente limitate. Si dimostrino le seguenti affermazioni.*

1. C'è una soluzione unica, appartenente a $M_B^2[0,T]$ per ogni $T > 0$.
2. Se $f'(x_0) = 0$, allora $X_t = x_0$ per ogni $t \geq 0$.
3. Se $\sigma = 0$, allora $f(X_t)$ è una funzione differenziabile non crescente.
4. Se $f'' \leq \frac{2}{\sigma^2}$, allora la funzione $E[f(X_t)]$ è non crescente.

1 Soluzioni

Esercizio 1.

1. Il processo $t \mapsto B(t) := X(t,x) - x$ ha le seguenti proprietà: i) è gaussiano; ii) ha media nulla; iii) ha covarianza $C(t,s) = t \wedge s$. In base ad una proposizione del corso (Prop. 18), è un moto browniano. Le proprietà suddette sono tutte immediate da verificare.

2. Se verifichiamo che Y è gaussiano ed ha le stesse funzioni media e covarianza di X, allora ha la stessa legge. Siano (t_1, x_1), ... , (t_n, x_n) punti di $[0,1] \times \mathbb{R}$. Il vettore aleatorio $(Y(t_1, x_1), ..., Y(t_n, x_n))$ è dato da $(X(t_1, x_1 + h) - h, ..., X(t_n, x_n + h) - h)$, quindi è gaussiano in quanto trasformazione affine di $(X(t_1, x_1 + h), ..., X(t_n, x_n + h))$ che è gaussiano (è il processo X calcolato nei punti $(t_1, x_1 + h)$, ... , $(t_n, x_n + h)$). Quindi Y è gaussiano. Ha media pari a x:

$$E[Y(t,x)] = E[X(t, x+h) - h] = x + h - h = x$$

Infine, detta sempre $C(t,s,x,y)$ la covarianza di X,

$$\begin{aligned} E[(Y(t,x) - x)(Y(s,y) - y)] &= E[(X(t, x+h) - h - x)(X(s, y+h) - h - y)] \\ &= (t \wedge s) \exp\left(-|(x+h) - (y+h)|^2\right) = C(t,s,x,y). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} E\left[|X(t,x) - X(s,y)|^2\right] &= E\left[|X(t,x) - x + x - y + X(s,y) - y|^2\right] \\ &\leq 2|x-y|^2 + 2E\left[|X(t,x) - x + X(s,y) - y|^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[|X(t,x) - x + X(s,y) - y|^2\right] &= C(t,t,x,x) + C(s,s,y,y) - 2C(t,s,x,y) \\ &= t + s - 2s\exp\left(-|x-y|^2\right) \\ &= t - s + 2s\left(1 - \exp\left(-|x-y|^2\right)\right) \\ &\leq |t-s| + 2\left(1 - \exp\left(-|x-y|^2\right)\right). \end{aligned}$$

Inoltre, per $r > 0$,

$$1 - \exp(-r) \leq r.$$

Mettendo tutto insieme,

$$\begin{aligned} E\left[|X(t,x) - X(s,y)|^2\right] &\leq 2|x-y|^2 + 2|t-s| + 4|x-y|^2 \\ &= 2|t-s| + 6|x-y|^2. \end{aligned}$$

Esercizio 2.

1. Il processo X è integrabile (a qualsiasi potenza) perché somma di v.a. limitate; le speranze condizionali di v.a. limitate sono integrabili a qualsiasi potenza, quindi anche il processo A lo è; e quindi, infine, anche Z lo è. Sono poi tutti adattati per ovvie ragioni. Vale, per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} E\left[X_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] &= E\left[\sum_{j=1}^{n} Y_j | \mathcal{F}_{n-1}\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[Y_j | \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= E\left[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] + \sum_{j=1}^{n-1} Y_j = E\left[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] + X_{n-1} \\ &\geq X_{n-1} \qquad q.c. \end{aligned}$$

dove in un passaggio intermedio abbiamo usato il fatto che $E\left[Y_j | \mathcal{F}_{n-1}\right] = Y_j$ per $j \leq n-1$ in quanto tali Y_j sono $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabili, ed all'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che, essendo $Y_n \geq 0$, anche $E\left[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] \geq 0$, q.c.. Quindi X è una submartingala. Invece, dal momento che $E\left[Y_j | \mathcal{F}_{j-1}\right]$ è $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabile per ogni $j \leq n$, anche A_n è $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabile, quindi

$$E\left[A_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] = A_n.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} E\left[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] &= E\left[X_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] - E\left[A_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= E\left[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] + X_{n-1} - A_n \\ &= X_{n-1} - A_{n-1} \end{aligned}$$

(in quanto $E\left[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] = A_n - A_{n-1}$) quindi $E\left[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] = Z_{n-1}$, ovvero Z è una martingala.

2. Dobbiamo dimostrare che, per ogni n, l'evento $\{\tau_a \leq n\}$ appartiene ad $\mathcal{F}_n$. Vale

$$\{\tau_a \leq n\} = \bigcup_{m \leq n} \{A_{m+1} \geq a\}$$

e tutti questi eventi stanno in $\mathcal{F}_n$, in particolare $\{A_{n+1} \geq a\}$, perché A_n è $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabile.

3. Vale

$$Z_{n \wedge \tau_a} = X_{n \wedge \tau_a} - A_{n \wedge \tau_a} \geq -A_{n \wedge \tau_a}$$

in quanto X è un processo non negativo. Dato $\omega \in \Omega$, $A_{j+1}(\omega) < a$ per $j < \tau_a(\omega)$, ovvero $A_k(\omega) < a$ per $k < \tau_a(\omega) + 1$. Siccome $n \wedge \tau_a(\omega) < \tau_a(\omega) + 1$, vale $A_{n \wedge \tau_a(\omega)}(\omega) < a$, quindi $Z_{n \wedge \tau_a(\omega)}(\omega) \geq -a$.

4. Essendo $Z_{n \wedge \tau_a}$ una martingala limitata dal basso da una costante, $Z_{n \wedge \tau_a}$ converge. Sia $\Omega_0 \subset \Omega$ l'insieme in cui A converge. Sia

$$\Omega_a = \left\{ \sup_{n \geq 0} A_n < a \right\}.$$

Vale $\Omega_0 \subset \cup_{a\in\mathbb{N}}\Omega_a$. Su Ω_a vale $\tau_a = \infty$, quindi $Z_{n\wedge\tau_a} = Z_n$ per ogni n, quindi anche Z_n converge. Questo accade quindi su $\cup_{a\in\mathbb{N}}\Omega_a$ e quindi in particolare su Ω_0.

5. Dal punto precedente si deduce che $\sum_j 1_{B_j}(\omega) < \infty$ per quasi ogni $\omega \in \Omega_0$, da cui la tesi.

Esercizio 3.

1. Basta osservare che, essendo $|f''(x)| \leq C$, la funzione $f'(x)$ è lipschitziana, quindi lo sono entrambi i coefficienti dell'equazione (pertanto si può applicare il teorema di esistenza ed unicità).

2. Basta osservare che $X_t = x_0$ per ogni $t \geq 0$ è soluzione (verifica l'identità integrale) e quindi è *la* soluzione, per quanto detto al punto precedente.

3. Se $\sigma = 0$, stiamo esaminando l'equazione differenziale ordinaria

$$X_t' = -f'(X_t), \qquad X_0 = x_0$$

che ha una ed una sola soluzione X_t, funzione deterministica, differenziabile. Vale

$$\frac{d}{dt}f(X_t) = f'(X_t)\,X_t' = -f'(X_t)^2 \leq 0$$

quindi la funzione $f(X_t)$ è non crescente.

4. Per la formula di Itô,

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\,d[X,X]_t \\ &= -f'(X_t)^2\,dt + f'(X_t)\,\sigma f'(X_t)\,dB_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\left(\sigma f'(X_t)\right)^2 dt \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(x_0) + \int_0^t \left(\frac{\sigma^2}{2}f''(X_s)\,f'(X_s)^2 - f'(X_s)^2\right) ds + \int_0^t \sigma f'(X_s)^2\,dB_s \\ &\leq f(x_0) + \int_0^t \left(f'(X_s)^2 - f'(X_s)^2\right) ds + \int_0^t \sigma f'(X_s)^2\,dB_s \\ &= f(x_0) + \int_0^t \sigma f'(X_s)^2\,dB_s \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi $f'' \leq \frac{2}{\sigma^2}$. Essendo $|f'(x)| \leq C$, l'integrando è di classe M^2, quindi $E\left[\int_0^t \sigma f'(X_s)^2\,dB_s\right] = 0$. Quindi

$$E[f(X_t)] \leq f(x_0).$$

Ripetendo lo stesso ragionamento tra due generici tempi $0 \leq t_0 \leq t$, si ottiene $E[f(X_t)] \leq E[f(X_{t_0})]$, cioè che $E[f(X_t)]$ è non crescente.