Istituzioni di Probabilità
Laurea magistrale in Matematica
prova scritta del 2/9/2013

Exercise 1 *(punti 10 circa) Si chiama moto browniano frazionario di indice* $H \in (0,1)$ *un processo gaussiano centrato* $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ *tale che*

$$E\left[B_t^H B_s^H\right] = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Si può dimostrare che un tale processo esiste e la sua legge è unica.

1. *Mostrare che, nel caso particolare* $H = \frac{1}{2}$, *esso è un moto browniano. Invece, per* $H \neq \frac{1}{2}$, *mostre che le v.a.* $B_2^H - B_1^H$ *e* B_1^H *non sono indipendenti.*

2. *Sia* $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ *un moto browniano frazionario di indice* $H \in (0,1)$. *Dato* $\lambda > 0$, *mostrare che* $X_t = \lambda^{-H} B_{\lambda t}^H$ *è un moto browniano frazionario di indice* $H \in (0,1)$. *Mostrare inoltre che* $B_t^H - B_s^H$ *ha la stessa legge di* B_{t-s}^H.

3. *Mostrare che* $\left(B_t^H\right)_{t\geq 0}$ *ha una versione continua,* γ*-hölderiana per ogni* $\gamma < H$.

Exercise 2 *(punti 10 circa) Sia* X *una passeggiata aleatoria asimmetrica, definita nel seguente modo:* $X_0 = 0$, $X_{n+1} = X_n + 1$ *con probabilità* $1/2$, $X_{n+1} = X_n - 2$ *con probabilità* $1/2$, $X_{n+1} - X_n$ *indipendente da* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$. *Sia* $\lambda > 1$ *l'unico numero tale che* $\frac{\lambda + \lambda^{-2}}{2} = 1$ *(si può dimostrare con metodi elementari di analisi che esiste ed è unico).*

1. *Si dimostri che* λ^{X_n} *è una* $\mathcal{F}_n$*-martingala.*

2. *Si deduca che* λ^{X_n} *converge q.c. per* $n \to +\infty$ *e che* X_n *tende q.c. ad un limite in* $[-\infty, +\infty[$ *(si ricordi che* $\lambda > 1$*). Si dimostri che* $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$. *[Sugg.:* $|X_n - X_{n-1}| \geq 1$.*]*

3. *Fissato un intero positivo* $M > 0$, *si definisca* $\tau_M = \inf\{n \geq 1 | X_n = M\}$ *(infinito se l'insieme è vuoto). Si dimostri che* $P\{\tau_M < +\infty\} = \lambda^{-M}$.

Exercise 3 *(punti 10 circa) Si consideri sull'intervallo fissato* $[0,T]$ *l'equazione differenziale stocastica*

$$dX_t = -X_t^3 dt + dW_t, \qquad X_0 = 0. \tag{1}$$

La funzione $b(x) = -x^3$ *non soddisfa la condizione di Lipschitz, per cui il teorema di esistenza e unicità non è applicabile. L'esercizio si propone di colmare (parzialmente) questa lacuna.*

1. *Fissato, $R > 0$, verificare che vale esistenza ed unicità forte per l'equazione*

$$dX_t = -sign\left(X_t\right)\left(\left|X_t\right| \wedge R\right)^3 dt + dW_t, \qquad X_0 = 0.$$

   Sia X_t^R la soluzione di questa equazione. Sia $\tau_R = \inf\{t \geq 0 | \left|X_t^R\right| = R\}$ (infinito se l'insieme è vuoto). Mostrare che, per q.o. ω, per $t \in [0, \tau_R(\omega) \wedge T)$ vale

$$X_t^R(\omega) = -\int_0^t \left(X_s^R(\omega)\right)^3 ds + W_t(\omega).$$

   (Dal punto di vista interpretativo, potremmo dire che X_t^R è una soluzione di (1) su $[0, \tau_R \wedge T)$, una soluzione locale, insoddisfacente se τ_R fosse troppo piccolo. Per questo cercheremo nel seguito di dimostrare che τ_R non è piccolo, per R grande.)

2. *Calcolare $d\left|X_t^R\right|^2$ e verificare che*

$$E\left[\left|X_t^R\right|^2\right] \leq T$$

   (o altra costante indipendentemente da R). Dedurre che

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^R\right|^2\right] \leq 2T^2 + T$$

   (o altra costante indipendentemente da R).

3. *Dedurre che, fissato $T > 0$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $R > 0$ per cui*

$$P\left(\tau_R \geq T\right) > 1 - \varepsilon.$$

   (A livello interpretativo, fissato $T > 0$, X_t^R risolve (1) su $[0, T]$, cioè è una soluzione globale, a meno di probabilità ε.)

1 Soluzioni

Esercizio 1.

1) Posto $B_t = B_t^H$ per $H = \frac{1}{2}$, vale

$$E\left[B_t B_s\right] = \frac{1}{2}\left(|t| + |s| - |t-s|\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+s-t+s) & \text{per} \quad t \geq s \\ \frac{1}{2}(t+s+t-s) & \text{per} \quad t < s \end{cases}$$

quindi $E\left[B_t B_s\right] = t \wedge s$ in entrambi i casi. Il processo B è un moto browniano.

Inoltre, per $0 < s < t$, vale

$$\begin{aligned} E\left[\left(B_t^H - B_s^H\right) B_s^H\right] &= E\left[B_t^H B_s^H\right] - E\left[B_s^H B_s^H\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) - |s|^{2H} \\ &= \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} - |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \end{aligned}$$

Per $H = \frac{1}{2}$, è zero (compatibile col fatto che è un moto browniano). Per $H \neq \frac{1}{2}$ e $t = 2$, $s = 1$, vale $\frac{1}{2}\left(|2|^{2H} - 2\right) \neq 0$ (mentre $E\left[\left(B_t^H - B_s^H\right)\right] E\left[B_s^H\right] = 0$) quindi $B_2^H - B_1^H$ e B_1^H non sono indipendenti, perché non sono scorrelate.

2) Il processo X è gaussiano e centrato (argomentare). Vale

$$\begin{aligned} E\left[X_t X_s\right] &= \lambda^{-2H} E\left[B_{\lambda t}^H B_{\lambda s}^H\right] = \frac{\lambda^{-2H}}{2}\left(|\lambda t|^{2H} + |\lambda s|^{2H} - |\lambda t - \lambda s|^{2H}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) \end{aligned}$$

quindi X soddisfa le condizioni del moto browniano frazionario di indice $H \in (0,1)$.

Inoltre, B_t^H è una v.a. gaussiana centrata di varianza

$$E\left[B_t^H B_t^H\right] = |t|^{2H}$$

per cui $B_{t-s}^H \sim N\left(0, |t-s|^{2H}\right)$. Infine $B_t^H - B_s^H$ è una v.a. gaussiana centrata di varianza

$$\begin{aligned} E\left[\left(B_t^H - B_s^H\right)^2\right] &= E\left[B_t^H B_t^H\right] + E\left[B_s^H B_s^H\right] - 2E\left[B_t^H B_s^H\right] \\ &= |t|^{2H} + |s|^{2H} - 2\frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right) \\ &= |t-s|^{2H} \end{aligned}$$

quindi ha la stessa legge di B_{t-s}^H.

3) Per una nota proprietà delle gaussiane centrate, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una costante $C_n > 0$ tale che

$$E\left[\left(B_t^H - B_s^H\right)^n\right] = C_n E\left[\left(B_t^H - B_s^H\right)^2\right]^{n/2}.$$

Quindi

$$E\left[\left(B_t^H - B_s^H\right)^n\right] \leq C_n \left|t-s\right|^{nH} = C_n \left|t-s\right|^{1+(nH-1)}$$

quindi, se n soddisfa $nH - 1 > 0$, c'è una versione continua, γ-hölderiana per ogni $\gamma < \frac{nH-1}{n}$. Per l'arbitrarietà di n (ed il solito ragionamento sulla coincidenza delle diverse versioni, quando sono già continue), la versione continua è γ-hölderiana per ogni $\gamma < H$.

Esercizio 2.

1) La generica v.a. X_n assume solo un numero finito di valori (per induzione) e quindi $M_n = \lambda^{X_n}$ è integrabile. Ovviamente è anche adattata. Poniamo $Y_n = X_{n+1} - X_n$; la v.a. Y_n è indipendente da $\mathcal{F}_n$; e vale 1 con probabilità 1/2, -2 con probabilità 1/2.

Vale

$$E\left[\lambda^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right] = E\left[\lambda^{X_n+Y_n}|\mathcal{F}_n\right] = E\left[\lambda^{X_n}\lambda^{Y_n}|\mathcal{F}_n\right] = \lambda^{X_n}E\left[\lambda^{Y_n}|\mathcal{F}_n\right] = \lambda^{X_n}$$

(quindi M è una martingala), in quanto

$$E\left[\lambda^{Y_n}|\mathcal{F}_n\right] = E\left[\lambda^{Y_n}\right] = \lambda^1\frac{1}{2} + \lambda^{-2}\frac{1}{2} = 1.$$

2) Siccome $M_n = \lambda^{X_n} > 0$, per un noto teorema esiste il limte quasi certo $\theta = \lim_{n\to\infty}\lambda^{X_n} \geq 0$. Quindi X_n tende ad un limite (aleatorio) $L \in [-\infty, +\infty[$. Se per assurdo fosse $L \in \mathbb{R}$, varrebbe $\lim_{n\to\infty}|X_{n+1} - X_n| = 0$, mentre $|Y_n| \geq 1$. Quindi $L = -\infty$.

3) Per il teorema d'arresto, per ogni $n \geq 1$

$$1 = E\left[M_{\tau_M\wedge n}\right] = E\left[\lambda^{X_{\tau_M\wedge n}}\right] = E\left[\lambda^{X_{\tau_M\wedge n}}1_{\tau_M<\infty}\right] + E\left[\lambda^{X_{\tau_M\wedge n}}1_{\tau_M=\infty}\right].$$

Per $n \to \infty$, sull'evento $\{\tau_M < \infty\}$ vale $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_M\wedge n} = X_{\tau_M} = X_M$, mentre su $\{\tau_M = \infty\}$ vale $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_M\wedge n} = \lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ (per il punto 2). Se possiamo applicare un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, troviamo

$$1 = E\left[\lambda^{X_{\tau_M}}1_{\tau_M<\infty}\right] = E\left[\lambda^M 1_{\tau_M<\infty}\right] = \lambda^M P\left(\tau_M < \infty\right)$$

da cui la tesi. Ora, il processo X_n cresce al massimo di un'unità per volta e parte da 0, quindi esso è compreso in $(-\infty, M]$ (sia che $\tau_M < \infty$ sia che $\tau_M = \infty$), quindi $\lambda^{X_M} \in (0, \lambda^M]$, per cui possiamo applicare il teorema di convergenza dominata.

Esercizio 3.

1) La funzione $b_R(x) = -sign(x)(|x| \wedge R)^3$ vale $-x^3$ per $|x| \leq R$, che è lipschitziana, poi vale $-R^3$ per $x > R$ ed R^3 per $x < -R$, entrambe lipschiziane; e collegate con continuità al pezzo centrale, quindi b_R è globalmente lipschiziana.

Vale, per q.o. ω,

$$X_t^R(\omega) = -\int_0^t b_R\left(X_s^R(\omega)\right) ds + W_t(\omega)$$

per ogni $t \geq 0$. Se ci restringiamo a $t \in [0, \tau_R(\omega))$, vale $\left|X_t^R(\omega)\right| < R$ (per continuità delle traiettore, essendo $X_0^R(\omega) = 0$), quindi $b_R\left(X_s^R(\omega)\right) = -sign\left(X_s^R(\omega)\right)\left|X_s^R(\omega)\right|^3 = -\left(X_s^R(\omega)\right)^3$ per $s \in [0, t]$, sempre con $t \in [0, \tau_R(\omega))$.

2)

$$d\left|X_t^R\right|^2 = -2\left|X_t^R\right|\left(\left|X_t^R\right| \wedge R\right)^3 dt + 2X_t^R dW_t + dt \leq 2X_t^R dW_t + dt$$

$$\left|X_t^R\right|^2 \leq \int_0^t 2X_s^R dW_s + t$$

e siccome $E\left[\int_0^t 2X_s^R dW_s\right] = 0$,

$$E\left[\left|X_t^R\right|^2\right] \leq t \leq T.$$

Poi vale

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^R\right|^2\right] &\leq E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t 2X_s^R dW_s\right|\right] + T \\ &\leq E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t 2X_s^R dW_s\right|^2\right]^{1/2} + T \end{aligned}$$

da cui, per la disuguaglianza di Doob,

$$\begin{aligned} &\leq E\int_0^T 2\left|X_s^R\right|^2 ds + T \\ &\leq 2T^2 + T \end{aligned}$$

dal risultato precedente.

3) Per la disuguaglianza di Chebyshev,

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^R\right|\geq R\right)\leq\frac{E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^R\right|^2\right]}{R^2}\leq\frac{16T^2e^{4T}+T}{R^2}.$$

Fissato $\varepsilon>0$, prendiamo R tale che $\frac{16T^2e^{4T}+T}{R^2}<\varepsilon$. Vale

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^R\right|<R\right)\geq 1-\varepsilon$$

e quindi $P\left(\tau_R\geq T\right)>1-\varepsilon$. Infatti, se $\sup_{t\in[0,T]}\left|X_t^R\right|<R$ allora $\tau_R\geq T$.