Istituzioni di Probabilità
Laurea magistrale in Matematica
prova scritta del 2/12/2013

Exercise 1 *(punti 10 circa) Un foglio browniano è un processo gaussiano a valori reali* $X(s,t)$*, indicizzato da* (s,t) *in* $[0,T]\times[0,T]$*, con media zero e* $E[X(s,t)X(s',t')] = (s \wedge s')(t \wedge t')$ *(dove* $a \wedge b$ *indica il minimo tra* a *e* b*). E' detto continuo se, per q.o.* ω*,* $X(\omega)$ *è continuo su* $[0,T]^2$*. Diamo per buono il fatto che un foglio browniano esista.*

1. Sia X *un foglio browniano. Si dimostri che, per ogni* $s > 0$*,* $\frac{X(s,\cdot)}{\sqrt{s}}$ *è un moto browniano reale.*

2. Sia X *un foglio browniano. Si dimostri che*

$$E\left[\left|X(s,t) - X(s',t')\right|^2\right] \leq T\left(|s-s'| + |t-t'|\right)$$

(sugg.: vale la disuguaglianza elementare $ab - a'b' \leq T(|a-a'| + |b-b'|)$ *per tutti gli* $a,b \in [0,T]$*).*

3. Si dimostri che, per ogni $m \geq 2$*,*

$$E\left[\left|X(s,t) - X(s',t')\right|^m\right] \leq C_m T^{m/2}\left(|s-s'| + |t-t'|\right)^{m/2}$$

dove $C_m = E[|Z|^m]$*,* Z *v.a. normale standard.*

4. Si deduca che X *ha una modificazione continua, che è anche* α*-hölderiana per ogni* $\alpha < 1/2$*.*

Exercise 2 *(punti 10 circa) Sia* $(Y_n)_{n\geq 0}$ *un processo definito come segue:* $Y_0 = 0$ *e, per ogni intero* $n \geq 0$*,*

$$Y_{n+1} = Y_n + 2^{-(n+1)}\xi_n$$

dove ξ_n *è una v.a. di Bernoulli di parametro* $1/2$ *a valori in* $\{0,1\}$ *(una v.a. discreta che assume i valori* $0,1$ *con egual probabilità) indipendente da* $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_0,...,Y_n\}$*.*

1. Si dimostri che, per ogni funzione limitata misurabile $g : [0,1] \to \mathbb{R}$*,*

$$E\left[g(Y_{n+1})\,|\mathcal{F}_n\right] = \frac{g\left(Y_n + 2^{-(n+1)}\right) + g(Y_n)}{2}.$$

Sia ora $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *una funzione misurabile limitata. Per ogni intero non negativo* n*, poniamo*

$$X_n = \frac{f(Y_n + 2^{-n}) - f(Y_n)}{2^{-n}} = 2^n\left(f\left(Y_n + 2^{-n}\right) - f(Y_n)\right).$$

2. Si dimostri che X è una martingala rispetto ad $(\mathcal{F}_n)_n$.

3. Si supponga che f sia non decrescente. Dimostrare che X converge q.c.

4. Si supponga che f sia lipschitziana ($|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$). Dimostrare che X converge q.c. e in L^p per ogni $p \geq 1$ finito.

Exercise 3 *(punti 10 circa) Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano reale, n un intero positivo e μ, σ due matrici $n\times n$. Si consideri la seguente equazione differenziale stocastica a valori in $\mathbb{R}^{n\times n}$:*

$$dS_t = \mu^T S_t \mu dt + \sigma^T S_t \sigma dB_t, \qquad S_0 = s_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

1. Si discuta esistenza e unicità delle soluzioni. Si dimostri che, se $s_0^T = s_0$, allora q.c. vale, per ogni $t \geq 0$, $S_t^T = S_t$.

D'ora in avanti si supponga $s_0^T = s_0$.

2. Per $v \in \mathbb{R}^n$ fissato, si trovi l'equazione soddisfatta da $X_t = \langle S_t v, v\rangle$. Supponiamo poi che s_0 sia una matrice definita non negativa ($\langle s_0 v, v\rangle \geq 0$ per ogni v). Se $\mu = \mu_0 Id$, $\sigma = \sigma_0 Id$, con $\mu_0, \sigma_0 \in \mathbb{R}$, dimostrare che anche S_t è una matrice definita non negativa.

3. Se μ e σ sono matrici ortogonali (cioè soddisfano $A^T = A^{-1}$), trovare e risolvere l'equazione soddisfatta da $Tr(S_t)$, la traccia di S_t.

4. Sia $v_t \in \mathbb{R}^n$ la soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dv_t = -v_t dB_t \qquad v_0 = v.$$

Nel caso particolare

$$dS_t = 2S_t dB_t, \qquad S_0 = s_0$$

dimostrare tramite la formula di Itô che

$$\langle S_t v_t, v_t\rangle = e^{-3t}\langle s_0 v, v\rangle.$$

(eventualmente anche in altro modo).

1 Soluzioni

Esercizio 1.

1. Poniamo $B_t(\omega) = \frac{X(s,t,\omega)}{\sqrt{s}}$ con $s > 0$ fissato. Allora B_t è un processo gaussiano:

$$\left(B_{t_1}, ..., B_{t_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left(X\left(s, t_1\right), ..., X\left(s, t_n\right)\right)$$

che è ovvia trasformazione lineare del vettore (per definizione) gaussiano $\left(X\left(s, t_1\right), ..., X\left(s, t_n\right)\right)$. Vale

$$E\left[B_t\right] = E\left[\frac{X(s,t)}{\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{\sqrt{s}} E\left[X(s,t)\right] = 0$$

$$C_B\left(t, t'\right) = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1}{\sqrt{s}} E\left[X(s,t) X\left(s, t'\right)\right] = t \wedge t'$$

quindi si applica la caratterizzazione della Proposizione 18 del corso.

2.

$$\begin{aligned}
& E\left[\left|X(s,t) - X\left(s', t'\right)\right|^2\right] \\
& = E\left[X(s,t)^2\right] + E\left[X\left(s', t'\right)^2\right] - 2E\left[X(s,t) X\left(s', t'\right)\right] \\
& = st + s't' - 2\left(s \wedge s'\right)\left(t \wedge t'\right).
\end{aligned}$$

Se $s \leq s'$, $t \leq t'$, allora vale

$$st + s't' - 2st = s't' - st \leq T\left(\left|s - s'\right| + \left|t - t'\right|\right).$$

Se invece $s \leq s'$, $t > t'$, allora vale

$$st + s't' - 2st' = s\left(t - t'\right) + \left(s - s'\right)t' \leq T\left(\left|s - s'\right| + \left|t - t'\right|\right).$$

Gli altri casi sono riconducibili a questi due, scambiando (s,t) con (s', t').

3. Poniamo $Z = \frac{X(s,t) - X(s',t')}{\sigma}$ dove $\sigma^2 = E\left[\left|X(s,t) - X\left(s', t'\right)\right|^2\right]$. Z è normale standard, quindi

$$C_m = E\left[|Z|^m\right] = E\left[\frac{\left|X(s,t) - X\left(s', t'\right)\right|^m}{\sigma^m}\right]$$

da cui

$$E\left[\left|X(s,t) - X\left(s', t'\right)\right|^m\right] = C_m \left(\sigma^2\right)^{m/2} \leq C_m \left(T\left(\left|s - s'\right| + \left|t - t'\right|\right)\right)^{m/2}$$

per il punto precedente.

4. Vale

$$\begin{aligned}(|s-s'|+|t-t'|)^{2n} &= \left((|s-s'|+|t-t'|)^2\right)^n \\ &\leq 2^n\left(|s-s'|^2+|t-t'|^2\right)^n\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}E\left[|X(s,t)-X(s',t')|^{4n}\right] &\leq C_{4n}\left(T\left(|s-s'|+|t-t'|\right)\right)^{2n} \\ &\leq C_{4n}T^{2n}2^n\left(|s-s'|^2+|t-t'|^2\right)^n \\ &\leq C_{4n}T^{2n}2^n\left\|(s,t)-(s',t')\right\|^{2n}.\end{aligned}$$

Da qui si ragiona come per il moto browniano (vedi corso).

Esercizio 2.

1.

$$E\left[g\left(Y_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n\right] = E\left[g\left(Y_n+2^{-(n+1)}\xi_n\right)|\mathcal{F}_n\right].$$

Poniamo

$$\Phi(y) = E\left[g\left(y+2^{-(n+1)}\xi_n\right)\right] = \frac{g\left(y+2^{-(n+1)}\right)+g(y)}{2}.$$

Allora, per la Proposizione 11 delle dispense,

$$\begin{aligned}E\left[g\left(Y_n+2^{-(n+1)}\xi_n\right)|\mathcal{F}_n\right] &= \Phi(Y_n) \\ &= \frac{g\left(Y_n+2^{-(n+1)}\right)+g(Y_n)}{2}.\end{aligned}$$

2. $X_n = 2^n\left(f\left(Y_n+2^{-n}\right)-f\left(Y_n\right)\right)$ è adattato a $\mathcal{F}_n$. Inoltre

$$E\left[|X_n|\right] \leq 2^{n+1}\sup|f| < \infty.$$

Infine

$$E\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = 2^{n+1}E\left[f\left(Y_{n+1}+2^{-(n+1)}\right)|\mathcal{F}_n\right] - 2^{n+1}E\left[f\left(Y_{n+1}\right)|\mathcal{F}_n\right]$$

ed usando il punto 1 (prima con $g(y) = f\left(y+2^{-(n+1)}\right)$, poi con $g(y)=f(y)$)

$$\begin{aligned}&= 2^{n+1}\frac{f\left(Y_n+2^{-(n+1)}+2^{-(n+1)}\right)+f\left(Y_n+2^{-(n+1)}\right)}{2} \\ &- 2^{n+1}\frac{f\left(Y_n+2^{-(n+1)}\right)+f\left(Y_n\right)}{2}\end{aligned}$$

$$= 2^n \left(f\left(Y_n + 2^{-n}\right) - f\left(Y_n\right)\right) = X_n.$$

3. Basta osservare che $X_n \geq 0$ ed applicare un noto teorema di convergenza (corollario 8 delle dispense).

4. In questo caso vale

$$|X_n| \leq \frac{L 2^{-n}}{2^{-n}} = L$$

quindi in particolare $X_n \geq -L$, oppure $E\left[|X_n|\right] \leq L$, per cui si può di nuovo applicare un noto teorema (corollario 8 o 9).

Esercizio 3.

Nei primi 3 punti scriviamo la risoluzione operando vettorialmente, ma tutti i passaggi si possono giustificare tramite le componenti; come invece facciamo nel punto 4, più complicato. Indichiamo con S_t^{ij} le componenti di S_t (ed analogamente per le componenti dei vettori) e osserviamo che vale

$$S_t^{ij} = s_0^{ij} + \int_0^t \left(\mu^T S_s \mu\right)^{ij} ds + \int_0^t \left(\sigma^T S_s \sigma\right)^{ij} dB_s. \tag{1}$$

1. I coefficienti sono funzioni lineari, quindi lipschitziane. Quindi vale esistenza e unicità forte. Siccome S_t^T risolve la stessa equazione di S_t ma con dato iniziale s_0^T, se vale $s_0^T = s_0$ allora per unicità il processo S_t^T è indistinguibile da S_t.

2. Vale

$$\langle S_t v, v\rangle = \langle s_0 v, v\rangle + \int_0^t \langle S_s \mu v, \mu v\rangle\, ds + \int_0^t \langle S_s \sigma v, \sigma v\rangle\, dB_s.$$

A tale identità si può arrivare o con la formula di Itô oppure ragionando per componenti, moltiplicando tutti i termini dell'equazione (1) per $v^j v^i$ (le costanti $v^j v^i$ entrano negli integrali) e poi sommando sugli indici.

Se poi $\mu = \mu_0 Id$, $\sigma = \sigma_0 Id$, allora

$$\langle S_t v, v\rangle = \langle s_0 v, v\rangle + \mu_0^2 \int_0^t \langle S_s v, v\rangle\, ds + \sigma_0^2 \int_0^t \langle S_s v, v\rangle\, dB_s$$

ovvero

$$dX_t = X_t \left(\mu_0^2 + \sigma_0^2 dB_t\right), \qquad X_0 = \langle s_0 v, v\rangle$$

da cui

$$X_t = \langle s_0 v, v\rangle\, e^{\left(\mu_0^2 - \frac{\sigma_0^2}{2}\right)t + \sigma_0^2 B_t} \geq 0.$$

3. Vale

$$Tr\left(S_t\right) = Tr\left(s_0\right) + \int_0^t Tr\left(\mu^T S_s \mu\right) ds + \int_0^t Tr\left(\sigma^T S_s \sigma\right) dB_s.$$

A questa identità si arriva sommando le componenti di ugual indice dell'equazione (1).

Ma la traccia è invariante per cambi di base (cioè $Tr\left(\mu^T S_s \mu\right) = Tr\left(S_s\right)$, $Tr\left(\sigma^T S_s \sigma\right) = Tr\left(S_s\right)$) quindi

$$Tr\left(S_t\right) = Tr\left(s_0\right) + \int_0^t Tr\left(S_s\right) ds + \int_0^t Tr\left(S_s\right) dB_s$$

da cui, come sopra,

$$Tr\left(S_t\right) = Tr\left(s_0\right) e^{\left(1-\frac{1}{2}\right)t+B_t}.$$

4. Usando le componenti (omettiamo la somma $\sum_{i,j=1}^n$ per semplicità di notazione), vale

$$d\left\langle S_t v_t, v_t\right\rangle = d\left(S_t^{ij} v_t^j v_t^i\right)$$

ed usando la formula di Itô per la funzione $f(s,v,w) = svw$,

$$\begin{aligned}
&= S_t^{ij} v_t^j dv_t^i + S_t^{ij} v_t^i dv_t^j + v_t^j v_t^i dS_t^{ij} + v_t^i d\left[S^{ij}, v^j\right]_t + v^j d\left[S^{ij}, v^i\right]_t + S^{ij} d\left[v^i, v^j\right]_t \\
&= -S_t^{ij} v_t^j v_t^i dB_t - S_t^{ij} v_t^i v_t^j dB_t + 2 v_t^j v_t^i S_t^{ij} dB_t \\
&- 2 v_t^i S_t^{ij} v^j dt - 2 v^j S_t^{ij} v_t^i dt + S^{ij} v^i v^j dt
\end{aligned}$$

$$= -3 v_t^i S_t^{ij} v^j dt = -3\left\langle S_t v_t, v_t\right\rangle dt$$

da cui

$$\left\langle S_t v_t, v_t\right\rangle = e^{-3t}\left\langle s_0 v, v\right\rangle.$$