Istituzioni di Probabilità
Laurea magistrale in Matematica
Compitino del 29/04/2014

Exercise 1 *(punti 9 circa) Sia* $\gamma : R \to (0, \infty)$ *una funzione positiva, continua e strettamente crescente. Diciamo che* X *è un processo* γ*-gaussiano se è un processo gaussiano a media nulla e con funzione di covazianza data da* $E[X_t X_s] = \gamma(t \wedge s) = \gamma(t) \wedge \gamma(s)$ *e traiettorie continue. Dato un processo* γ*-gaussiano* X*, detta* (a, b) *l'immagine di* γ*, sia* $W_t = X_{\gamma^{-1}(t)}$ *per* $t \in (a, b)$*.*

1. Si dimostri che W *è un moto browniano continuo su* (a, b)*, cioè un processo gaussiano continuo a media zero e funzione di covarianza* $E[W_t W_s] = t \wedge s$*.*

2. Si supponga (solo in questo punto) che γ *sia (localmente)* α*-hölderiana, per un qualche* $\alpha \in (0, 1)$*. Dimostrare che esiste una versione del processo* X *che sia continua e localmente* β*-hölderiana per ogni* $\beta < \frac{\alpha}{2}$*.*

3 Si dimostri che esiste $W_a = \lim_{t \to a} W_t$*, come limite in media quadratica (sugg.: si usi la proprietà di Cauchy in* L^2*). Si dimostri poi che il processo* W *ha q.c. traiettorie continue sull'intervallo* $[a, b)$*.*

Exercise 2 *(punti 11 circa) Sia* $(X_j)_{j=1,2,...}$ *una famiglia di v.a. indipendenti a media nulla e varianza* $E\left[X_j^2\right] = \sigma_j^2$*, con* $X_0 = 0$*, e sia* $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, X_1, ..., X_n\}$ *la filtrazione associata. Si ponga* $S_n = \sum_{j=0}^{n} X_j$ *per* $n \geq 0$*.*

1. Si dimostri che S_n e $S_n^2 - \sum_{j=0}^{n} \sigma_j^2$ sono martingale.

Sia ora τ un tempo d'arresto finito a valori interi positivi, rispetto alla filtrazione data, tale che $E\left[\sum_{j=0}^{\tau} \sigma_j^2\right] < \infty$.

2. Dimostrare che $E\left[\sup_n S_{\tau \wedge n}^2\right] \leq CE\left[\sum_{j=0}^{\tau} \sigma_j^2\right]$, per una costante $C > 0$ opportuna (indipendente dalle X_j e da τ).

3. Si dimostri che $E\left[S_\tau^2\right] = E\left[\sum_{j=0}^{\tau} \sigma_j^2\right]$.

1 Soluzioni

Esercizio 1. 1) Presi $t_1 \leq ... \leq t_n$ in (a,b), il vettore $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ è uguale al vettore $\left(X_{\gamma^{-1}(t_1)}, ..., X_{\gamma^{-1}(t_n)}\right)$ che è gaussiano per ipotesi. Quindi W è un processo gaussiano. Per un noto teorema di analisi, sotto le ipotesi fatte γ^{-1} è una funzione continua, quindi le traiettorie di W sono continue per composizione di funzioni continue.

La media è nulla: $E[W_t] = E\left[X_{\gamma^{-1}(t)}\right] = 0$. Infine

$$E[W_t W_s] = E\left[X_{\gamma^{-1}(t)} X_{\gamma^{-1}(s)}\right] = \gamma\left(\gamma^{-1}(t)\right) \wedge \gamma\left(\gamma^{-1}(s)\right) = t \wedge s.$$

2) Vale $X_t = W_{\gamma(t)}$, $t \in \mathbb{R}$. Quindi, fissato ω tale che $W_\cdot(\omega)$ sia localmente δ-hölderiana per ogni $\delta < \frac{1}{2}$, abbiamo

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| &= \left|W_{\gamma(t)} - W_{\gamma(s)}\right| \leq C_\delta \left|\gamma(t) - \gamma(s)\right|^\delta \\ &\leq C_\delta C_\alpha^\delta \left|t-s\right|^{\alpha\delta}. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di $\delta < \frac{1}{2}$ si deduce il risultato. Alternativamente,

$$E\left[|X_t - X_s|^p\right] = E\left[\left|W_{\gamma(t)} - W_{\gamma(s)}\right|^p\right] \leq C_p \left|\gamma(t) - \gamma(s)\right|^{p/2} \leq C_p C_\alpha^{p/2} \left|t-s\right|^{\alpha p/2}$$

da cui si deduce il risultato con i soliti ragionamenti (che qui non riportiamo per somiglianza con altri compiti, ma che vanno scritti).

3. L'intervallo (a,b) è contenuto in $(0,\infty)$, strettamente o meno; a quindi è un umero reale ≥ 0. Vale

$$E\left[\left|W_t - W_{t'}\right|^2\right] = |t - t'|$$

quindi, presa una qualsiasi successione $t_n \to a$, la successione $\{W_{t_n}\}$ è di Cauchy in L^2, quindi ha limite. Il limite non dipende dalla successione t_n, dal momento che esiste per ogni successione data. E' quindi il limite in L^2 di W_t per $t \to a$. Chiamiamolo W_a. E' una v.a. gaussiana, essendo limite di gaussiane.

Consideriamo il processo $(W_t)_{t\in[a,b)}$. Vale

$$E\left[|W_t - W_s|^p\right] \leq C_p \left|t-s\right|^{p/2}$$

se $t, s > a$, mentre, se $t > a$,

$$E\left[\left|W_t - W_a\right|^2\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[\left|W_{t_n} - W_a\right|^2\right] = \lim_{n\to\infty} |t_n - a| = |t - a|$$

dove $t_n \to a$. Inoltre, come sopra, $W_t - W_a$ è una v.a. gaussiana, essendo limite di gaussiane. Quindi

$$E\left[|W_t - W_a|^p\right] \leq C_p \left|t-a\right|^{p/2}.$$

Per il criterio di Kolmogorov esiste una versione continua. Ma essa è indistinguibile da W su (a,b), essendo entrambi processi continui. E la versione è q.c. uguale a W per $t=a$ (in quanto versione). Quindi, q.c., W e la sua versione coincidono, quindi W è continuo su $[a,b)$.

Esercizio 2. 1. Sono entrambe ovviamente adattate, dipendendo al tempo n dalle X_j solo per $j=1,...,n$; e sono integrabili, perché combinazione lineare finita di v.a. integrabili (le X_iX_j, $i,j=1,...,n$, per S_n^2, coi fattori di quadrato integrabile). Vale poi

$$
\begin{aligned}
E\left[S_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= E\left[X_{n+1}+\sum_{j=0}^{n}X_j|\mathcal{F}_n\right] = \sum_{j=0}^{n}X_j + E\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n}X_j + E\left[X_{n+1}\right] = \sum_{j=0}^{n}X_j
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato il fatto che le X_j, $j=1,...,n$, sono adattate a $\mathcal{F}_n$ mentre la X_{n+1} ne è indipendente. Infine

$$
\begin{aligned}
E\left[S_{n+1}^2-\sum_{j=0}^{n+1}\sigma_j^2|\mathcal{F}_n\right] &= E\left[\sum_{i,j=0}^{n+1}X_iX_j|\mathcal{F}_n\right]-\sum_{j=0}^{n+1}\sigma_j^2 \\
&= \sum_{i,j=0}^{n}X_iX_j + E\left[2\sum_{i=0}^{n}X_iX_{n+1}+X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right]-\sum_{j=0}^{n+1}\sigma_j^2 \\
&= \sum_{i,j=0}^{n}X_iX_j + 2\sum_{i=0}^{n}X_iE\left[X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right]+E\left[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n\right]-\sum_{j=0}^{n+1}\sigma_j^2 \\
&= \sum_{i,j=0}^{n}X_iX_j + 2\sum_{i=0}^{n}X_iE\left[X_{n+1}\right]+E\left[X_{n+1}^2\right]-\sum_{j=0}^{n+1}\sigma_j^2 \\
&= \sum_{i,j=0}^{n}X_iX_j + \sigma_{n+1}^2-\sum_{j=0}^{n+1}\sigma_j^2 \\
&= \sum_{i,j=0}^{n}X_iX_j - \sum_{j=0}^{n}\sigma_j^2.
\end{aligned}
$$

Abbiamo verificato tutte le condizioni richieste.

2. Anche il processo $S_{n\wedge\tau}$ è una martingala, quindi, per la disuguaglianza di

Doob, per ogni $N \geq 1$ vale

$$E\left[\sup_{n\leq N} S^2_{\tau\wedge n}\right] \leq 4E\left[S^2_{\tau\wedge N}\right].$$

Ma anche $S^2_{\tau\wedge n} - \sum_{j=0}^{\tau\wedge n}\sigma_j^2$ è una martingala, quindi

$$E\left[S^2_{\tau\wedge N} - \sum_{j=0}^{\tau\wedge N}\sigma_j^2\right] = E\left[S^2_{\tau\wedge 0} - \sum_{j=0}^{\tau\wedge 0}\sigma_j^2\right] = 0$$

da cui $E\left[S^2_{\tau\wedge N}\right] = E\left[\sum_{j=0}^{\tau\wedge N}\sigma_j^2\right]$. Poi, $E\left[\sum_{j=0}^{\tau\wedge N}\sigma_j^2\right] \leq E\left[\sum_{j=0}^{\tau}\sigma_j^2\right]$. In conclusione

$$E\left[\sup_{n\leq N} S^2_{\tau\wedge n}\right] \leq 4E\left[\sum_{j=0}^{\tau}\sigma_j^2\right].$$

Per convergenza monotona,

$$E\left[\sup_{n} S^2_{\tau\wedge n}\right] \leq 4E\left[\sum_{j=0}^{\tau}\sigma_j^2\right].$$

3. Abbiamo già visto che $E\left[S^2_{\tau\wedge N}\right] = E\left[\sum_{j=0}^{\tau\wedge N}\sigma_j^2\right]$. Per convergenza monotona,

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\sum_{j=0}^{\tau\wedge N}\sigma_j^2\right] = E\left[\sum_{j=0}^{\tau}\sigma_j^2\right].$$

D'altra parte $\lim_{N\to\infty} S^2_{\tau\wedge N} = S^2_\tau$ q.c. e

$$S^2_{\tau\wedge N} \leq \sup_n S^2_{\tau\wedge n} \in L^1$$

(è in L^1 per il punto precedente), quindi per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_{N\to\infty} E\left[S^2_{\tau\wedge N}\right] = E\left[\lim_{N\to\infty} S^2_{\tau\wedge N}\right] = E\left[S^2_\tau\right].$$

Ne discende l'identità da dimostrare.