Istituzioni di Probabilità
Laurea magistrale in Matematica
Compitino del 27/05/2014

Exercise 1 *(punti 10 circa) Sia B un moto browniano reale, rispetto ad una base stocastica $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$.*

i) Trovare un'equazione differenziale stocastica, della forma $dY_t = Y_t a_t dt + Y_t b_t dB_t$, soddisfatta da $Y_t = \exp\left(B_t^2\right)$ (a_t, b_t processi stocastici). Specificare con chiarezza la formula di Itô utilizzata.

ii) Con strategia simile, mostrare che $M_t = \exp\left(B_t^2 - 2\int_0^t \left(B_s^2 + \frac{1}{2}\right) ds\right)$ è una martingala, per $t < \frac{1}{4}$ (si osservi che $\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\lambda x^2} e^{-x^2/2} dx < \infty$ per $\lambda < \frac{1}{2}$, senza bisogno di ridimostrarlo).

iii) Riscrivere $B_t^2 - 2\int_0^t \left(B_s^2 + \frac{1}{2}\right) ds$ in modo opportuno con la formula di Itô riconoscendo che il punto (ii) è analogo ad un teorema visto a lezione nel caso di integrandi limitati (qui l'integrando invece è $2B_t$, non limitato).

iv) Generalizzando il punto (ii), trovare delle condizioni sulla coppia (φ, ψ), con $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2, tali che il processo $N_t = \exp\left(\varphi(B_t) - \int_0^t \psi(B_s) ds\right)$ sia una martingala. Verificare che il punto (ii) rientra in questo schema. Specificare anche quali siano le condizioni da verificare, quando si imponga a priori che φ, ψ siano già limitate con le loro derivate prime.

Exercise 2 *(punti 10 circa) Preliminarmente, ricordiamo che S^1 è l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e che un vettore aleatorio bidimensionale (X, Y) si dice a valori in S^1 se $P\left((X,Y) \in S^1\right) = 1$. Sia $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P\right)$ una base stocastica, con un moto browniano bi-dimensionale $\left(B, \widetilde{B}\right)$.*

i) Si consideri l'equazione differenziale stocastica in $\mathbb{R}^2$

$$dX_t = -\frac{1}{2} X_t dt + Y_t dB_t$$
$$dY_t = -\frac{1}{2} Y_t dt - X_t dB_t.$$

Sia (X_0, Y_0) una v.a. $\mathcal{F}_0$-misurabile a valori in S^1 e sia (X, Y) una qualsiasi soluzione con dato iniziale (X_0, Y_0). Mostrare che (X_t, Y_t) è a valori in S^1, per ogni $t \geq 0$ (prima di risolvere il punto (iii)).

ii) Presa una matrice ortogonale U, della forma $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, il vettore $U(X_0, Y_0)^T$ è ancora a valori in S^1. Si dimostri che, se (X_t, Y_t) è una soluzione relativa a (X_0, Y_0), allora $U(X_t, Y_t)^T$ è una soluzione relativa a $U(X_0, Y_0)^T$.

iii) Mostrare che il processo

$$\begin{aligned} X_t^* &= \sin B_t \\ Y_t^* &= \cos B_t \end{aligned}$$

è l'unica soluzione forte, partendo da $(X_0, Y_0) = (0, 1)$. (Facoltativamente, scrivere la soluzione generale, cioè quella che parte dal generico (X_0, Y_0).)

iv) Mostrare che il processo $2X_{t/4}^* Y_{t/4}^*$ ha la stessa legge del processo X_t^*.

v) Mostrare che il processo $W_t = \int_0^t X_s^* dB_s + \int_0^t Y_s^* d\widetilde{B}_s$ è ancora un moto browniano.

1 Soluzioni

Esercizio 1. i) Usiamo ad esempio $f(x) = e^x$, $X_t = B_t^2$, osservando che $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $dX_t = 2B_t dB_t + dt$ (anch'esso dalla formula di Itô), $d[X]_t = 4B_t^2 dt$ Quindi

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t dX_t + \frac{1}{2} Y_t d[X]_t \\ &= Y_t \left(1 + 2B_t^2\right) dt + Y_t 2B_t dB_t. \end{aligned}$$

E' il risultato desiderato, con $a_t = 1 + 2B_t^2$, $b_t = 2B_t$.

ii) Usando sempre $f(x) = e^x$, ma ora $X_t = B_t^2 - 2\int_0^t \left(B_s^2 + \frac{1}{2}\right) ds$, per cui

$$\begin{aligned} dX_t &= 2B_t dB_t + dt - 2\left(B_t^2 + \frac{1}{2}\right) dt \\ &= 2B_t dB_t - 2B_t^2 dt \end{aligned}$$

$d[X]_t = 4B_t^2 dt$, troviamo

$$\begin{aligned} dM_t &= M_t \left(2B_t dB_t - 2B_t^2 dt\right) + \frac{1}{2} M_t 4B_t^2 dt \\ &= 2M_t B_t dB_t. \end{aligned}$$

Essa è una martingala, su un generico intervallo $[0, b]$, se mostriamo che $M_t B_t$ è di classe $M_B^2[0, b]$. Dobbiamo verificare $E\int_0^b M_t^2 B_t^2 dt < \infty$, ovvero

$$E\int_0^b \exp\left(2B_t^2 - 4\int_0^t B_s^2 ds - 2t\right) B_t^2 dt < \infty.$$

Se verifichiamo

$$E\left[\exp\left(2B_t^2\right) B_t^2\right] \leq C$$

per $t \in [0, b]$, abbiamo la tesi. Siccome $B_t \sim N(0, t)$, quindi della forma $B_t = \sqrt{t}Z$ con $Z \sim N(0, 1)$, quindi $B_t^2 = tZ^2$, dobbiamo verificare che $tE\left[\exp\left(2tZ^2\right) Z^2\right] \leq C$, ovvero

$$E\left[\exp\left(2tZ^2\right) Z^2\right] \leq C$$

per $t \in [0, b]$. Vale

$$E\left[\exp\left(2tZ^2\right) Z^2\right] \leq E\left[\exp\left(2bZ^2\right) Z^2\right]$$

e questo è finito per $b < \frac{1}{4}$, per quanto suggerito nel testo dell'esercizio. Quindi M è una martingala su $[0, b]$, per ogni $b < \frac{1}{4}$, quindi su $[0, \frac{1}{4})$.

iii) (Come abbiamo già osservato sopra)

$$B_t^2 - 2\int_0^t \left(B_s^2 + \frac{1}{2}\right) ds = \int_0^t 2B_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t 4B_s^2 ds$$

che è della forma di un esponente della densità del teorema di Girsanov:

$$\int_0^t b_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds.$$

A lezione abbiamo visto che è una martingala, nel caso in cui b sia un processo limitato. Qui $b_t = 2B_t$ non è un processo limitato, ma abbiamo ugualmente verificato che è una martingala, per t piccoli.

iv) Coi soliti calcoli fatti sopra,

$$\begin{aligned}
dN_t &= N_t \left(d\varphi\left(B_t\right) - \psi\left(B_t\right) dt\right) + \frac{1}{2} N_t d\left[\varphi\left(B\right)\right]_t \\
&= N_t \left(\varphi'\left(B_t\right) dB_t + \frac{1}{2}\varphi''\left(B_t\right) dt - \psi\left(B_t\right) dt + \frac{1}{2}\left(\varphi'\left(B_t\right)\right)^2 dt\right) \\
&= N_t \left(\frac{1}{2}\varphi''\left(B_t\right) - \psi\left(B_t\right) + \frac{1}{2}\left(\varphi'\left(B_t\right)\right)^2\right) dt + N_t \varphi'\left(B_t\right) dB_t.
\end{aligned}$$

Essa sarà una martingala (ad esempio) se

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\varphi''(x) + \frac{1}{2}\left(\varphi'(x)\right)^2 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$N\varphi'(B) \in M_B^2.$$

Il caso del punto (ii) rientra in questo schema, perché $\varphi(x) = x^2$ e $\psi(x) = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)$ soddisfano l'equazione scritta sopra $\left(\frac{1}{2}\varphi''(x) + \frac{1}{2}\left(\varphi'(x)\right)^2 = 1 + 2x^2\right)$ e $N\varphi'(B) = 2MB$ abbiamo verificato stare in M_B^2.

Se φ, ψ sono già limitate con le loro derivate prime, allora $\varphi'(B)$ è limitato, $\varphi(B_t) - \int_0^t \psi(B_s) ds$ e quindi N è limitato, quindi $N\varphi'(B) \in M_B^2$. Dev'essere solo verificata la condizione $\psi = \frac{1}{2}\varphi'' + \frac{1}{2}(\varphi')^2$.

Esercizio 2. i) Per la formula di Itô,

$$\begin{aligned}
d\left(X_t^2 + Y_t^2\right) &= 2X_t dX_t + 2Y_t dY_t + Y_t^2 dt + X_t^2 dt \\
&= 2X_t\left(-\frac{1}{2}X_t dt + Y_t dB_t\right) + 2Y_t\left(-\frac{1}{2}Y_t dt - X_t dB_t\right) + Y_t^2 dt + X_t^2 dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

quindi $X_t^2 + Y_t^2 = X_0^2 + Y_0^2 = 1$ q.c.

ii) Qui il problema è come svolgere i calcoli vettoriali, perché la formula di Itô a cui siamo abituati è per funzioni a valori reali invece che vettoriali. Dovremmo infatti calcolare $dU(X_t, Y_t)^T$. Lo studente che proceda vettorialmente, per analogia con casi vari, non sbaglia; deve però stare attento al termine correttivo della formula di Itô, spiegando bene perché lo scrive in un certo modo, nel caso a valori vettoriali. Qui di seguito invece, per restare più vicini a quanto fatto a lezione, presentiamo i calcoli in maniera meno compatta.

Vale $(V_t, Z_t)^T := U(X_t, Y_t)^T = (X_t \cos\theta + Y_t \sin\theta, -X_t \sin\theta + Y_t \cos\theta)^T$, quindi

$$\begin{aligned}
dV_t &= d(X_t \cos\theta + Y_t \sin\theta) = -\frac{1}{2}X_t \cos\theta dt + Y_t \cos\theta dB_t - \frac{1}{2}Y_t \sin\theta dt - X_t \sin\theta dB_t \\
&= -\frac{1}{2}(X_t \cos\theta + Y_t \sin\theta)\, dt + (Y_t \cos\theta - X_t \sin\theta)\, dB_t \\
&= -\frac{1}{2}V_t dt + Z_t dB_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dZ_t &= d(-X_t \sin\theta + Y_t \cos\theta) = \frac{1}{2}X_t \sin\theta dt - Y_t \sin\theta dB_t - \frac{1}{2}Y_t \cos\theta dt - X_t \cos\theta dB_t \\
&= -\frac{1}{2}(-X_t \sin\theta + Y_t \cos\theta)\, dt - (Y_t \sin\theta + X_t \cos\theta)\, dB_t \\
&= -\frac{1}{2}Z_t dt - V_t dB_t
\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}
dV_t &= -\frac{1}{2}V_t dt + Z_t dB_t \\
dZ_t &= -\frac{1}{2}Z_t dt - V_t dB_t
\end{aligned}$$

che è l'equazione differenziale di partenza. Quindi $(V_t, Z_t)^T$ è sua soluzione, ed ha ovviamente come dato iniziale $U(X_0, Y_0)^T$.

iii) L'unicità discende dal noto teorema, essendo i coefficienti lipschitziani in quanto lineari. Verifichiamo che (X_t^*, Y_t^*) è soluzione. Vale

$$\begin{aligned}
dX_t &= \cos B_t dB_t - \frac{1}{2}\sin B_t dt = Y_t dB_t - \frac{1}{2}X_t dt \\
dY_t &= -\sin B_t dB_t - \frac{1}{2}\cos B_t dt = -X_t dB_t - \frac{1}{2}Y_t dt.
\end{aligned}$$

iv) Vale ovviamente $2X^*_{t/4}Y^*_{t/4} = \sin 2B_{t/4}$. Il processo $2B_{t/4}$ ha la stessa legge di B_t, quindi (siccome la legge si conserva per composizione), $\sin 2B_{t/4}$ e $\sin B_t$ hanno la stessa legge. Eventualmente si può argomentare meglio l'invarianza della legge sotto transformazioni misurabili, trattandosi della legge del processo, non della singola v.a. (basta allora prendere le marginali n-dimensionali generiche e ripetere la spiegazione).

v) E' una martingala, perché X^*_s, Y^*_s sono di classe M^2 in quanto limitati; continua per la continuità degli integrali stocastici. Ha variazione quadratica

$$[W]_t = \int_0^t (X^*_s)^2\, ds + \int_0^t (Y^*_s)^2\, ds$$

(non ci sono termini misti per l'indipendenza dei moti browniani)

$$= \int_0^t \left(\sin^2 B_s + \cos^2 B_s\right) ds = t.$$

Quindi, per il teorema di Lévy, è un moto browniano.